

УДК 519.248 : 531.9

МАТЕМАТИКА

С. К. Погосян

Асимптотика логарифма статистической суммы
гиббсовского ансамбля для решетчатых систем с
многочастичным взаимодействием

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александрияном 6/І 1982)

Рассмотрим классическую конфигурационную систему одинаковых частиц, находящихся в некотором конечном подмножестве $\Lambda \subset \mathbb{Z}^v$ v -мерной целочисленной решетки ($v \geq 1$) и взаимодействующих с помощью симметричного, трансляционно-инвариантного многочастичного потенциала $\Phi(c)$, $c \in C(\Lambda)$, где $C(\Lambda)$ — множество всех подмножеств (конфигураций) множества Λ ($\Phi(\emptyset) = 0$). Распределение вероятностей на $C(\Lambda)$, задаваемое формулой

$$P_{\Lambda, \beta, z}(c) = \Xi^{-1}(\Lambda, \beta, z) z^{|c|} e^{-\beta U(c)},$$

называется распределением Гиббса (¹). Здесь $|\cdot|$ — числа точек в конечном множестве, $U(c)$ — энергия конфигурации c , задаваемая формулой

$$U(c) = \sum_{\bar{c} \subset c} \Phi(\bar{c}).$$

z (активность) и β (обратная температура) — некоторые положительные параметры и, наконец, нормирующий множитель

$$\Xi(\Lambda, \beta, z) = \sum_{c \in C(\Lambda)} z^{|c|} e^{-\beta U(c)},$$

и называется статистической суммой.

Предполагается, что потенциал Φ удовлетворяет следующему условию убывания на бесконечности: существует симметричная трансляционно-инвариантная метрика δ в $\mathbb{Z}^v$, удовлетворяющая условию

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}^v} \exp\left(-\frac{1}{2} \delta(0, x)\right) < \infty$$

и такая, что

$$\sum_{\substack{c \in C(\mathbb{Z}^v) \\ c \in c}} \exp(L_\delta(c) |\Phi(c)|) < \infty.$$

Здесь $L_\delta(c)$ — длина минимального, относительно метрики δ , дерева (связного графа без циклов), вершины которого содержат все точки c .

Назовем параллелепипедом в $\mathbb{Z}^v$ множество точек $x \in \mathbb{Z}^v$ таких,

что $|x^i| < b_i$, где $b_i, i=1, \dots, \nu$ — натуральные числа. Пусть $W(r), r > 0$ — класс всех параллелепипедов $\Lambda \subset Z^\nu$, удовлетворяющих условию: $\text{diam } \Lambda \leq r|\Lambda|^{1/\nu}$. Обозначим через $\Lambda^{(i)}, i=0, 1, \dots, \nu-1$ совокупность всех i -мерных граней параллелепипеда Λ .

Определим последовательность функций $\varphi = \{\varphi_n(x_1, \dots, x_n)\}_{n \geq 2}, (x_1, \dots, x_n) \in Z^\nu$ равенствами:

$$\varphi_0 \equiv 0, \varphi_1 = 1, \varphi_n(X) = \sum_{\gamma \in \Gamma(X)} \prod_{B \in \gamma} (e^{-\beta \Phi(B)} - 1) \text{ при } n \geq 2, \quad (1)$$

где $X = (x_1, \dots, x_n)$. Здесь сумма берется по всем обобщенным графам $\gamma \in \Gamma(X)$, связным относительно точек X . Обобщенным графом $\gamma = (B_1, \dots, B_m), m=1, 2, \dots$ с вершинами в некотором конечном множестве G называется произвольная конечная последовательность подмножеств $B_i \subseteq G$, содержащих не менее двух точек. Обобщенный граф называется связным относительно двух точек $g_1, g_2 \in G$, если существует цепочка $(B_{i_1}, \dots, B_{i_k}), B_{i_j} \in \gamma$ такая, что $B_{i_j} \cap B_{i_{j+1}} \neq \emptyset, j=1, \dots, k-1$ и $g_1 \in B_{i_1}, g_2 \in B_{i_k}$. Наконец, обобщенный граф называется связным относительно подмножества $V \subseteq G$, если он связан относительно любых двух точек из V . Функции, определенные формулами (1), называются функциями Урсела (¹).

Далее, для любого $X = (x_1, \dots, x_n) \in Z^\nu$ через $\bar{X}$ обозначим множество всех геометрически различных точек, занятых частицами $x_1, \dots, x_n$.

Теорема 1. Пусть активность z достаточно мала. Тогда для любого $\Lambda \in W(r)$ имеет место разложение

$$\ln \Xi(\Lambda, \beta, z) = a_0 |\Lambda| + a_1 \sum_{\Lambda \in \Lambda^{(\nu-1)}} |\bar{\Lambda}| + \dots + a_{\nu-1} \sum_{\Lambda \in \Lambda^{(1)}} |\bar{\Lambda}| + a_\nu + R(\Lambda), \quad (2)$$

при этом

$$a_0 = a_0(\Phi, \beta, z) = \sum_{n \geq 0} z^n \sum_{X \in \Lambda^n} \varphi(X), \quad (3)$$

где φ — функция Урселла; $a_i = a_i(\Phi, \beta, z), i=1, \dots, \nu$ — константы, зависящие от потенциала Φ и параметров β и z (явный вид a_1 и a_2 при $\nu=2$ приводится ниже), наконец, величина $R(\Lambda) = R(\Lambda, \Phi, \beta, z)$, допускает оценку

$$|R(\Lambda)| \leq C |\Lambda|^{-1/\nu}$$

с константой $C = C(\Phi, \beta, z, r)$.

Доказательство этой теоремы основано на применении сильных кластерных оценок для урезанных корреляционных функций (²). Используемый метод доказательства позволяет получать явные выражения для всех коэффициентов $a_i, i=1, \dots, \nu$, однако в общем случае $\nu \geq 1$ они имеют громоздкий вид. Для иллюстрации сформулируем частный случай теоремы 1 при $\nu=2$ и приведем явные выражения для коэффициентов.

Теорема 1'. Пусть $\nu=2$ и активность z достаточно мала. Тогда для любого $\Lambda \in W(r)$ имеет место разложение

$$\ln \Xi(\Lambda, \beta, z) = a_0 |\Lambda| + a_1 |\Gamma(\Lambda)| + a_2 + R(\Lambda),$$

где a_0 определено формулой (3), $\Gamma(\Lambda)$ — граница множества Λ ,

$$a_1 = \sum_{x \in (Z^1)_+} \sum_{c \in C_+(Z^1_+)} f_{\beta, z}(\{x\} \cup c),$$

$$a_2 = \sum_{x \in \overline{Z^1_{+,+}}} \left[\sum_{c \in C_+(Z^1_{+,-})} f_{\beta, z}(\{x\} \cup c) + \sum_{c \in D} f_{\beta, z}(\{x\} \cup c) \right],$$

а величина $R(\Lambda)$ удовлетворяет оценке

$$|R(\Lambda)| \leq C|\Lambda|^{-1/2}.$$

При этом использованы следующие обозначения: для любого $V \subset Z^1$,

$$C_+(V) = C(V) \setminus \{\emptyset\}; \quad (Z^1)_+ = \{(x^1, x^2) \in Z^2 : x^1 = 0, x^2 \geq 0\},$$

$$Z^1_+ \setminus \{(x^1, x^2) \in Z^2 : x^2 > 0\}, \quad Z^1_{+,-} = \{(x^1, x^2) \in Z^2 : x^1 > 0, x^2 < 0\},$$

$$\overline{Z^1_{+,+}} = \{(x^1, x^2) \in Z^2 : x^1 \geq 0, x^2 \geq 0\},$$

$$I) = \{c \in C_+(Z^2 \setminus \overline{Z^1_{+,+}}) : c \cap Z^1_{+,-} \neq \emptyset, c \cap Z^1_{+,-} \neq \emptyset\},$$

где множества $Z^1_{+,-}$, $Z^1_{+,+}$ определяются по аналогии с $Z^1_{+,-}$.
Наконец,

$$f_{\beta, z}(c) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} \sum_{\substack{X \in Z^{1,n} \\ X \subset c}} \sum_{m \geq 0} \frac{z^m}{m!} \sum_{\substack{Y \in Z^{1,m} \\ Y \subset Z^1 \setminus c}} (-1)^{|Y|} \varphi(X, Y),$$

где φ — функция Урселла, а $(X, Y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$, если $X = (x_1, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, \dots, y_m)$.

З а м е ч а н и е. Главный член асимптотики (1) получен в работах (3) и (4). Явное выражение для второго члена асимптотики содержится в (5) и (6). Для непрерывных систем с парным взаимодействием, заключенных в ограниченную область $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ с гладкой границей, разложение, аналогичное (2), содержится в работе (7). Однако в то время как для указанных непрерывных систем в асимптотике логарифма статистической суммы последний из растущих вместе с $|\Lambda|$ членов имеет порядок $\ln |\Lambda|$, в решетчатом случае, как это видно из теоремы 1, такой член отсутствует. Логарифмический член отсутствует также в случае непрерывных систем, заключенных в многогранник (8).

Институт математики Академии наук Армянской ССР

Ս. Կ. ՊՈՂՈՍՅԱՆ

Բազմամասնիկ փոխազդումով կապարավոր համակարգերի Գիբսյան անսամբլի վիճակագրական գումարի լոգարիթմի ասիմպտոտիկան

Դիտարկվում է $\Lambda \subset Z^d$ ($d \geq 1$) վերջավոր բազմություն մեջ գտնվող միանման մասնիկների կոնֆիգուրացիոն համակարգը: Ենթադրվում է, որ մասնիկները փոխազդում են սիմետրիկ, տրանսլացիոն ինվարիանտ բազմամասնիկ պոտենցիալի միջոցով, որը բավարարում է անվերջության վրա

նվազման բավականաչափ ընդհանուր պայմանին, Յաժր ակտիվության դեպ-
քում բերված է համապատասխան դիրսյան անսամբլի վիճակադրական գու-
մարի լոգարիթմի ասիմպտոտիկական վերլուծությանը, երբ $\Lambda \uparrow Z$: Լեսյա-
ցուցման մեթոդը թույլ է տալիս նաև բացահայտ հաշվել վերլուծության բո-
լոր շնվազող անդամները:

ЛИТЕРАТУРА — ԴՐԱՎԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Д. Рюэль. Статистическая механика. Строгие результаты, Мир, М., 1971. ² М. Duneau, B. Soullard, Comm. Math. Phys., vol. 47, 155—166 (1976). ³ L. Van Hove, Physica, vol. 15, 951—961 (1949). ⁴ C. N. Yang, T. D. Lee, Phys. Rev., vol. 87, 404—409 (1952). ⁵ Р. Л. Добрушин, Теоретическая и мат. физика, т. 12, 115—134 (1972). ⁶ M. Flsher, G. Gagnalp, Comm. Math. Phys., vol. 56, 11—56 (1977). ⁷ С. К. Погосян, Изв. АН АрмССР, сер. мат., т. 13, № 3 (1978). ⁸ F. H. Abdulla-Zadeh, R. A. Mlatos, S. K. Pogostin, Multicomponent random systems N.—Y. Marcel Dekker, 1—36 (1980).