ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXIV 1982 3

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

Г. Г. Геворкян

О представлении и единственности представления измеримых функций мартингалами

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 28/XII 1981)

Пусть (Ω, F, P) вероятностное пространство, $F_1 \subset F_2 \subset \ldots F_n \subset F$ последовательность σ-алгебр и F_∞—порожденная ими минимальная σ-алгебра, $F_\infty \subset F$.

В работах ([1-3]) были рассмотрены вопросы о возможности представления произвольной F_∞-измеримой функции $f(x)$ сходящимися к ней почти всюду на Ω мартингалами $\{f_n, F_n\}_{n=1}^\infty$, а также сходящимися к $f(x)$ рядами $\sum_{k=1}^\infty a_k \psi_k(x)$, где $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ центрированная относительно $\{F_n\}$ система функций.

Для формулировки этих результатов приведем некоторые определения из работ ([1]) и ([2]).

Пусть $\{\psi_n(x)\}$—ортонормированная в пространстве (Ω, F, P) система и F_n—минимальная σ-алгебра, относительно которой измеримы все функции $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$, $n=1, 2, \ldots$.

Определение 1. Ортонормированная система $\{\psi_n(x)\}$ называется H-системой, если

1) σ-алгебра F_n $(n=1, 2, \ldots)$ состоит из n атомов;

2) $\psi_1(x) \equiv 1$, каждая $\psi_n(x)$ при $n>1$ равна нулю вне одного из атомов σ-алгебры F_{n-1} и принимает ровно два (положительно на Δ_n^+ и отрицательно на Δ_n^-) значения на множестве точек этого атома.

Пусть G и H—алгебра с единицей Ω, $G \subset H \subset F$, $0<\delta\leq 1/2$ и $B\in H$. Обозначим через $S(B, \delta)$ множество тех точек Ω, где условная вероятность $P\{B/G\}$ множества B относительно G удовлетворяет неравенству $0<P\{B/G\}\leq\delta$.

Определение 2. Множество $S(A, \delta)$, $A\in H$, называется δ-расщепляющим множеством σ-алгебры G относительно σ-алгебры H, если:

1) $P\{A/G\}\leq\delta$ почти всюду на Ω;

2) $S(B, \delta)\subset S(A, \delta)$ для любого H.

Существование множеств $S(A, \delta)$ и его единственность (для различных A они с точностью до множества меры нуль совпадают), установлено в ([3]).

Обозначим через $S(m, n, \delta)$, $n\geq m$, множество $S(A, \delta)$, соответствующее случаю, когда $G=F_m$ и $H=F_n$.

Определение 3. Последовательность σ-алгебр $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется d-последовательностью, если

$$\bigcup_{n=m}^{\infty} S\left(m, n, \frac{1}{2}\right) = \Omega \text{ для любого } m \geqslant 1.$$

В работе ([1]) Р. Ганди была доказана

Теорема I *(Р. Ганди). Если $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ полна в $L_2[0, 1]$ и является H-системой, то для любой почти всюду конечной измеримой функции $f(x)$ существует ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\psi_n(x)$, который сходится к $f(x)$ почти всюду.*

Когда последовательность $\{F_n\}$ удовлетворяет определению 1, любой мартингал $\{f_n, F_n\}$ является последовательностью частичных сумм некоторого ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k\psi_k(x)$, где $\{\psi_k(x)\}$ фиксированная H-система, соответствующая последовательности $\{F_n\}$.

Когда (Ω, F, P) совпадает с пространством Лебега и H-система $\{\psi_k(x)\}$ полна в $L_2[0, 1]$, легко видеть, что соответствующая последовательность $\{F_n\}$ является d-последовательностью. Кроме того из полноты системы $\{\psi_n(x)\}$ вытекает, что множество F_∞-измеримых функций совпадает с множеством измеримых по Борелю функций. Поэтому приводимая ниже теорема Ламба ([2]) является обобщением теоремы I.

Теорема II. *(Ламб). Пусть $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ — d-последовательность. Тогда для любой почти всюду конечной F_∞-измеримой функции существует мартингал $\{f_n, F_n\}$, который почти всюду сходится к $f(x)$.*

Другое усиление теоремы I дано в работе Р. С. Давтяна ([3]).

Теорема III * *(Р. С. Давтян). Пусть $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — H-система, определенная на (Ω, F, P), такая, что*

$$P(\limsup_{n\geqslant 1} \Delta_n) = P(\Omega) = 1,$$

где $\Delta_n = \{\psi_n \neq 0\}$, а $f(x)$ произвольная F_∞-измеримая функция, конечная почти всюду. Тогда существует ряд по системе $\{\psi_n(x)\}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\psi_n(x)$, который почти всюду абсолютно сходится к $f(x)$.

Верна следующая

Теорема 1. *Если $\{F_n\}$ — d-последовательность, то для любой почти всюду конечной F_∞-измеримой функции $f(x)$ существует центрированная относительно $\{F_n\}$ система $\{\varphi_n(x)\}$ такая, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) = f(x) \text{ п. в. на } \Omega \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(x)| < +\infty \text{ п. в.}$$

Из этой теоремы вытекает следующее усиление теоремы II.

Теорема 2. *Если $\{F_n\}$ — d-последовательность и $f(x)$ произ-*

---

* Для системы Хаара эта теорема была доказана Ф. Г. Арутюняном ([4]).

вольная почти всюду конечная F_∞-измеримая функция, то существует мартингал $\{f_n, F_n\}$, который почти всюду сходится к $f(x)$ и $\sum_{n=1}^{\infty}|f_{n+1}(x)-f_n(x)|<+\infty$ п. в.

Верна более общая

Теорема 3. *Пусть $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$—d-последовательность и $f:\Omega\to[-\infty, +\infty]$, F_∞—измеримая функция ($f(x)$ может принять бесконечные значения на множестве положительной меры), тогда существует мартингал $\{f_n, F_n\}$, который на множестве $A=\{|f|=+\infty\}$ сходится к $f(x)$ по мере, а на A^c сходится к $f(x)$ п. в., при этом $\sum_{n=1}^{\infty}|f_{n+1}(x)-f_n(x)|\cdot\chi_{A^c}(x)<+\infty$ п. в.*

Теорема 4. *Пусть $F_1\subset F_2\subset\ldots\subset F_n\subset F$ и для произвольной F_∞-измеримой функции $f:\Omega\to[-\infty, +\infty]$ существует мартингал $\{f_n, F_n\}$, который по мере сходится к f на Ω. Тогда $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ является d-последовательностью.*

Когда F_∞—сепарабельная σ-алгебра, верна следующая

Теорема 5. *Пусть $\{F_n\}$—d-последовательность и F_∞ сепарабельна. Тогда существует центрированная относительно $\{F_n\}$ система $\{\varphi_n(x)\}$ такая, что для любой почти всюду конечной F_∞-измеримой функции $f(x)$ существует подпоследовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, такая что:*

1) $\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{n_k}(x)=f(x)$ *п. в.;*

2) $\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_{n_k}(x)|<+\infty$ *п. в.*

Теорема 5 является усилением и обобщением теоремы А. А. Талаляна (см. ([5]), теорема 2) о том, что существует ряд по системе Хаара, который универсален относительно подрядов.

Верна также следующая теорема неединственности.

Теорема 6. *Пусть $\{F_n\}$—d-последовательность, $\{f_n, F_n\}$—произвольный мартингал и m любое натуральное число. Тогда существует мартингал $\{\varphi_n, F_n\}$ такой, что $\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=0$ п. в., $\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)|<+\infty$ п. в. и $f_n=\varphi_n$ при $n\leq m$.*

В работе ([6]) Ф. Г. Арутюняном и А. А. Талаляном для рядов по системам Хаара и Уолша был установлен аналог известной теоремы Валле—Пуссена о единственности тригонометрических рядов. Для системы Хаара эта теорема формулируется следующим образом.

Теорема IV *(Ф. Г. Арутюнян, А. А. Талалян). Пусть ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\chi_n(x) \qquad (*)$$

где $\{\chi_n(x)\}$—система Хаара, обладает свойствами:

а) некоторая последовательность $\{S_{N_j}(x)\}$ частных сумм ря-

да (*) *сходится к суммируемой функции* $f(x)$ *всюду на отрезке* $[0, 1]$, *кроме, быть может, счетного множества точек;*

3) *для любой точки* $x_0 \in [0, 1]$ $\lim\limits_{k \to \infty} \frac{a_{n_k}}{\chi_{n_k}(x_0)} = 0$, *где* $n_1 < n_2 < \ldots$ $\ldots n_n < \ldots$ *суть все те номера* n, *для которых* $\chi_{n_k}(x_0) \neq 0$.

Тогда ряд (*) *является рядом Фурье функции* $f(x)$ *по системе Хаара, т. е.*

$$a_n = \int\limits_0^1 f(x)\chi_n(x)dx.$$

Теорему IV можно распространить на произвольные H-системы, рассмотренные в пространстве (Ω, F, P). При этом приходится ввести некоторую модификацию понятия точки пространства (Ω, F_∞, P).

Определение 4. Скажем, что $\xi = \{\delta_n\}_{n=1}^\infty$ является точкой пространства (Ω, F_∞, P) (относительно $\{F_n\}_{n=1}^\infty$), если $\delta_1 \supseteq \delta_2 \supseteq \ldots \supseteq \delta_n \supseteq \ldots$ и δ_n атом из σ-алгебры F_n $n = 1, 2, \ldots$

Если $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ является H-системой относительно последовательности σ-алгебр $\{F_n\}$ и $\xi = \{\delta_n\}_{n=1}^\infty$—точка (относительно $\{F_n\}$) пространства (Ω, F_∞, P), то значением функции $\psi_n(x)$ в точке ξ считается постоянное значение, принимаемое этой функцией на атоме δ_n, $n = 1, 2, \ldots$.

Если задан ряд $\sum\limits_{k=1}^\infty a_k\psi_k(x)$, то значением $S_n(\xi)$ частичной суммы $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^n a_k\psi_k(x)$ в точке $\xi = \{\delta_n\}_{n=1}^\infty$ считается величина $S_n(\xi) = \sum\limits_{k=1}^n a_k\psi_k(x)$.

Верны следующие теоремы.

Теорема 7. *Пусть ряд*

$$\sum_{n=1}^\infty a_n\psi_n(x), \tag{1}$$

где $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^\infty$—*$H$-система, обладает следующими свойствами:*

А) *некоторая фиксированная последовательность частичных сумм* $\{S_{N_l}(x)\}$ *ряда* (1) *сходится во всех, кроме, быть может, счетного множества точек* $\xi = \{\delta_n\}_{n=1}^\infty$, *т. е. существует конечный предел* $\lim\limits_{l \to \infty} S_{N_l}(\xi)$ *для всех* $\xi = \{\delta_n\}_{n=1}^\infty \notin A$, *где* A *не более чем счетное множество;*

Б) *ряд* (1) *по мере сходится к интегрируемой функции* $f(x)$;

В) *для любой точки* ξ *имеет место* $\lim\limits_{k \to \infty} \frac{a_{n_k}}{\psi_{n_k}(\xi)} = 0$, *где* $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ *суть все те номера* n, *для которых* $\psi_n(\xi) \neq 0$. *Тогда ряд* (1) *является рядом Фурье функции* $f(x)$ *по системе* $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^\infty$, *т. е.*

$$a_n = \int_{\Omega} f(x) \psi_n(x) dP.$$

Легко видеть, что теорема 7 содержит в себе теорему IV.

Теорема 8. *Пусть ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(x), \tag{2}$$

где $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — *H-система, обладает следующими свойствами:*

1) *некоторая последовательность частичных сумм* $\{S_{N_j}(x)\}$ *ряда* (2) *сходится во всех точках;*

2) *ряд* (2) *по мере сходится к интегрируемой функции* $f(x)$.

Тогда ряд (2) *является рядом Фурье функции* $f(x)$ *по системе* $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$.

В заключение выражаю благодарность А. А. Таландяну, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Ереванский государственный университет

Գ. Գ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ

Չափելի ֆունկցիաների մարտինգալներով ներկայացման և ներկայացման միակության վերաբերյալ

Աշխատանքում ձևակերպված են (առանց ապացույցի) որոշ թեորեմներ չափելի ֆունկցիաները մարտինգալներով ներկայացման և ինտեգրելի ֆունկցիաների զուգամիտող մարտինգալների միակության մասին։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *R. F. Gundy*, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 124, № 2 (1966). [2] *Ch. W. Lamb*, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 188, № 2 (1974). [3] *Р. С. Давтян*, Мат. заметки, т., 19, № 5 (1976). [4] *Ф. Г. Арутюнян*, Доклады АН АрмССР, т. 42, № 3 (1966). [5] *А. А. Талалян*, Изв. АН СССР, сер. мат., т. 24 (1960). [6] *Ф. Г. Арутюнян, А. А. Талалян*, Изв. АН СССР, сер. мат., т. 28 (1964).