ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXIV 1982 3

УДК 519.214

МАТЕМАТИКА

Б. С. Нахапетян

О поведении корреляционной функции стационарного случайного процесса

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 4/XI 1981)

Пусть ξ_t, $t\in Z^1$ стационарный случайный процесс, удовлетворяющий одному из двух нижеследующих критериев слабой зависимости:

а) сильное перемешивание (с. п.):

$$\sup_{A\in M^t_{-\infty},\, B\in M^{\infty}_{t+s}} |P(AB)-P(A)P(B)| = \alpha(s)\underset{s\to\infty}{\longrightarrow}0;$$

б) равномерное сильное перемешивание (р. с. п.):

$$\sup_{A\in M^t_{-\infty},\, B\in M^{\infty}_{t+s},\, P(A)>0} \left|\frac{P(AB)-P(A)P(B)}{P(A)}\right| - \varphi(s)\underset{s\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

Здесь M^b_a—σ-алгебра, порожденная случайными величинами ξ_t, $a\leqslant t\leqslant b$, a, $b\in\Sigma^1$, $-\infty\leqslant a<b\leqslant\infty$.

Хорошо известны следующие оценки для корреляционной функции $R(n)$ процессов с с. п. (см. ([1]), с. 389):

$$|R(n)|\leqslant(4+6\cdot C)(\alpha(n))^{\frac{\delta}{2+\delta}}$$

в случае, когда $M|\xi_0|^{2+\delta}<C<\infty$, $\delta>0$, и для процессов с р. с. п. (см. ([1]), с. 392)

$$|R(n)|\leqslant 2C(\varphi(n))^{\frac{1}{2}},\quad 0<C<\infty,$$

когда $M|\xi_0|^2<C$.

Из этих оценок следует, что корреляционная функция таких процессов стремится к нулю на бесконечности тем быстрее, чем быстрее стремится к нулю соответствующий коэффициент перемешивания.

Но оказывается, что имеет место любопытный факт (и он будет доказан в настоящей заметке), что как бы медленно ни стремился к нулю коэффициент перемешивания, корреляционная функция соответствующих процессов на бесконечности стремится к нулю с определенной скоростью, большей чем $\frac{1}{n^\varepsilon}$, $\varepsilon>0$. А именно, имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. * *Пусть стационарный случайный процесс* ξ_t, $t\in$

*Всюду далее мы исключаем из рассмотрения класс случайных процессов, представимых в виде $\xi_t=\eta_{t+1}-\eta_t$, где η_t получаются сдвигами некоторой случайной величины η_0, принадлежащей замкнутой среднеквадратически линейной оболочке случайных величин ξ_t, $t\in Z^1$ (см. ([1]), с. 411).

$\in Z^1$, $M\xi_0^2<\infty$ *обладает свойством р. с. п. Тогда при любом* $\varepsilon>0$, *в случае существования предела* $\lim\limits_{n\to\infty} R(n)n^{1-\varepsilon}$, *его значение необходимо равно нулю.*

Пусть x_i, $i\in Z^1$ последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с конечным вторым моментом,

$$MX_i=0 \text{ и } \xi_t=\sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i X_{t+i}, \text{ где } \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i^2<\infty,\ c_i\in R^1.$$

Теорема 2. *Пусть случайный процесс* $\xi_t=\sum\limits_{i=-\infty}^{\infty} c_i X_{t+i}$ *обладает свойством с. п. Тогда при любом* $\varepsilon>0$ *в случае существования предела* $\lim\limits_{n\to\infty} R(n)n^{1-\varepsilon}$ *его значение необходимо равно нулю.*

Далее отметим, что теоремы 1, 2 представляют собой необходимые признаки принадлежности процесса классу процессов, обладающих тем или иным свойством перемешивания.

Используя эти критерии, мы приведем примеры регулярных процессов, не обладающих свойством с. п., и примеры процессов с с. п., не обладающих свойством р. с. п.

Известно, что процесс $\xi_t=\sum\limits_{i=-\infty}^{\infty} c_i X_{t+i}$ регулярен (см. ([1]), с. 385). Пусть

$$c_i=\frac{1}{|i+r|^\alpha},\ i\in Z^1,\ r\in R^1\setminus Z^1,\ \alpha>\frac{1}{2}.$$

Тогда

$$R(n)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i c_{n+i}=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\frac{1}{|i+r|^\alpha}\cdot\frac{1}{|i+r+n|^\alpha}>\frac{1}{|r|^\alpha|r+n|^\alpha}$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{1-\varepsilon}}{|r|^\alpha|r+n|^\alpha}=\infty, \text{ если только } 1-\varepsilon>\alpha.$$

Таким образом, при $\frac{1}{2}<\alpha<1$ регулярный процесс $\xi_t=\sum\limits_{i=-\infty}^{\infty}\frac{X_{i+t}}{|i+r|^\alpha}$ не обладает свойством сильного перемешивания.

Рассмотрим теперь стационарную цепь Маркова, состояниями которой являются все целые числа, и $p_{n,n+1}=p_{-n,-n-1}=\alpha_n$, $n\geq 0$; $p_{n,0}=p_{-n,0}=1-\alpha_n$, $n>0$, $p_{0,0}=0$, $\alpha_0=\frac{1}{2}$, $0<\alpha_n<1$ при $n\geq 1$. Если f_{00}^n обозначает вероятность, выходя из нуля, впервые попасть в нуль на n-ом шагу, то $f_{00}^1=0$ и при $n\geq 2$ $f_{00}^n=\beta_{n-1}-\beta_n$, где $\beta_0=\beta_1=1$, $\beta_n=\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\ldots\cdot\alpha_{n-1}$. Стационарное распределение имеет вид $\pi_0=\left(\sum\limits_0^\infty\beta_n\right)^{-1}$,

$\pi_j=\pi_{-j}=\frac{1}{2}\pi_0\beta_{j-1}$, $j>0$ и существует в том и только в том случае, когда $\sum_0^\infty \beta_n<\infty$.

Пусть теперь

а) $f_{00}^n=An^{-2-\delta}$, $\delta>1$, где A выбирается из условия $\sum_1^\infty f_{00}^n=1$; $\Phi(j)=\operatorname{sing}\{j\}|j|^{\frac{1}{r}}$, r таково, что $\delta r>2$, $\xi_t^{(1)}=\Phi(X_t)$, где X_t—состояние цепи в момент t.

б) f_{00}^n определяется так же, как и в первом примере, $0<\delta<1$, $\Phi(0)=0$, $\Phi(j)=-\Phi(-j)=1+\frac{1}{j}$, $j>0$, $\xi_t^{(2)}=\Phi(X_t)$.

Ю. А. Давыдов показал (см. ([2])), что оба процесса ($\xi_t^{(1)}$ и $\xi_t^{(2)}$) удовлетворяют условию сильного перемешивания, а

$$R^{(1)}(n)\asymp n^{\frac{2}{r}-\delta},\quad R^{(2)}(n)\asymp n^{-\delta}.$$

Используя теорему 1, получаем, что процесс $\xi_t^{(1)}$ не обладает свойством р. с. п. при $0<\frac{\delta r-2}{r}<1$, процесс же $\xi_t^{(2)}$ вообще не обладает этим свойстоом.

Приведем доказательства теорем. Они очень просты.

Доказательство теоремы 1. Известно (см. ([1]), с. 413), что если стационарный случайный процесс ξ_t, $t\in Z^1$ с конечным вторым моментом обладает свойством р. с. п., то дисперсия $\sigma_n^2=D\left(\sum_{t=1}^n\xi_t\right)=$ $=nh(n)$, где $h(n)$—медленно меняющаяся функция. Одним из свойств медленно меняющихся функций является следующее: для любого $\varepsilon>0$

$$\lim_{n\to\infty}h(n)n^{-\varepsilon}=0. \tag{1}$$

Легко видеть, что в нашем случае

$$h(n)=\frac{2}{n}\sum_{j=1}^n(n-j)R(j)+R(0).$$

Воспользуемся теперь (1) и теоремой Штольца, утверждающей, что предел отношения двух варнантов x_n и y_n, $n\in Z^1$, $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=$ $=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$, если только $y_{n+1}>y_n$, $n\in Z^1$, и существует предел справа конечный или даже бесконечный. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{h(n)}{n^\varepsilon}=2\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{j=1}^n(n-j)R(j)}{n^{1+\varepsilon}}=$$

$$=2\frac{\sum_{j=1}^n(n-j)R(j)-\sum_{j=1}^{n-1}(n-1-j)R(j)}{n^{1+\varepsilon}-(n-1)^{1+\varepsilon}}=\frac{2}{1+\varepsilon}\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{j=1}^nR(j)}{n^\varepsilon}$$

при условии, что последний предел существует. Вновь применяя теорему Штольца, получаем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{n} R(j)}{n^{\varepsilon}} = \frac{1}{\varepsilon} \lim_{n\to\infty} n^{1-\varepsilon} R(n), \quad \varepsilon>0,$$

при условии существования предела в правой части равенства. Поскольку $\lim_{n\to\infty} h(n) n^{-\varepsilon} = 0$, получаем утверждение теоремы 1.

Доказательство теоремы 2. Известно, что случайный процесс $\xi_t = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i X_{t+i}$ подчиняется центральной предельной теореме (см. ([1]), с. 455). Известно также, что если процесс ξ_t обладает свойством сильного перемешивания и подчиняется центральной предельной теореме, то необходимо $\sigma_n^2 = nh(n)$, где $h(n)$—медленно меняющаяся функция (см. ([1]), с. 424). Для завершения доказательства теоремы 2 остается повторить соответствующую часть доказательства теоремы 1.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Բ. Ս. ՆԱՀԱՊԵՏՅԱՆ

Ստացիոնար պատահական պրոցեսի կոռելյացիոն ֆունկցիայի վարքի մասին

Աշխատանքում բերվում են թույլ կերպով կախված կոմպոնենտներով պրոցեսների այս կամ այն դասի պատկանելիության անհրաժեշտ հատկանիշներ կոռելյացիոն ֆունկցիայի տերմիններով։ Այդ հատկանիշների օգնությամբ բերվում են ռեգուլյար պրոցեսների օրինակներ, որոնք օժտված չեն ուժեղ խառնման հատկությամբ, և ուժեղ խառնող պրոցեսների օրինակներ, որոնք չունեն հավասարաչափ ուժեղ խառնման հատկությունները։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *И. А. Ибрагимов. Ю. В. Линчик,* Независимые и стационарно связанные величины. Наука, М., 1955. [2] *Ю. А. Давыдов,* Теория вероятности и ее применения, т. 18. вып. 2 (1973).