ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXIV 1982 3

УДК 517.51

МАТЕМАТИКА

Р. А. Аветисян

Об обобщенном D-свойстве функциональных последовательностей

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 29/X 1981)

Результаты настоящей заметки примыкают к работе ([1]). Напомним следующее

Определение ([2]). Будем говорить, что система $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x\in[0, 1]$ обладает свойством D, если из абсолютной сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x)$$

на множестве положительной меры следует неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|<\infty.$$

Аналогично определяется D-свойство для кратных последовательностей.

Чтобы привести определение понятия обобщенного D-свойства, сделаем следующие обозначения:

через Z_+ обозначим множество

$$\{(m, n): m, n=1, 2, \ldots\}.$$

Семейство множеств $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ будем называть правильным разбиением, если $Z_+=\bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$, где N_k конечные подмножества множества Z_+, причем $N_i\cap N_j=\varnothing (i\neq j)$. Через $\overline{N_k}$ будем обозначать число элементов множества N_k. Пусть, далее, $\{\Phi_{mn}(x, y)\}_{m,n=1}^{\infty}$ система функций, определенных на квадрате $T=[0, 1]X[0, 1]$.

Определение 2. Будем говорить, что система $\{\Phi_{mn}(x, y)\}_{m,n=1}^{\infty}$ обладает обобщенным D-свойством, если из условия

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\sum_{(m,n)\in N_k} a_{mn}\Phi_{mn}(x, y)\right|<\infty,$$

где $(x, y)\in E\subset T$, $|E|>0$, следует неравенство

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} |a_{mn}|<\infty$$

(здесь $|E|$—лебегова мера плоского множества E). В работе ([1]) для случая $\overline{N_k}=1$ приведены утверждения типа необходимых и достаточных условий на системы вида $\{f_n(x)\cdot f_m(y)\}_{m,n=1}^{\infty}$ и $\{\varphi(mx)\cdot\varphi(ny)\}_{m,n=1}^{\infty}$, чтобы они обладали D-свойством на всяком множестве положительной меры.

В случае, когда $\Phi_{mn}(x, y)$ является двойной тригонометрической системой, В. С. Панферовым доказано, что если $\overline{N}_k\leqslant C(k=1, 2,\dots)$, то она обладает обобщенным D-свойством (в смысле определения 2) на всяком множестве положительной плоской меры. С другой стороны, легко построить двойной тригонометрический ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Bigg|\sum_{(m,n)\in N_k} a_{mn}\sin mx\sin ny+b_{mn}\sin mx\cos ny+$$

$$+c_{mn}\cos mx\sin ny+d_{mn}\cos mx\cos ny\Bigg|,$$

который сходится п. в. на квадрате $Q=[0, 2\pi]\times[0, 2\pi]$, но

$$\sum_{m,n=1}^{\infty}|a_{mn}|+|b_{mn}|+|c_{mn}|+|d_{mn}|=+\infty.$$

Здесь, очевидно, будет выполняться условие

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\ \overline{N}_k=+\infty.$$

Действительно, положим $b_{mn}=c_{mn}=d_{mn}=0$,

$$a_{mn}=\begin{cases}0, \text{ если } m\neq n\\ \dfrac{1}{n}, \text{ если } m=n\end{cases}$$

и рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=M_n+1}^{M_{n+1}}\frac{1}{k}\sin kx\sin ky\right),$$

где возрастающая последовательность M_n $(M_1=0)$ удовлетворяет условию $M_n=O(n^4)$.

По неравенству Коши—Буняковского, будем иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty}\iint\limits_{Q}\left|\sum_{k=M_n+1}^{M_{n+1}}\frac{1}{k}\sin kx\sin ky\right|dxdy\leqslant 2\pi\times$$

$$\times\sum_{n=1}^{\infty}\left|\iint\limits_{Q}\left(\sum_{k=M_n+1}^{M_{n+1}}\frac{1}{k}\sin kx\sin ky\right)^2dxdy\right|^{1/2}=2\pi^2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=M_n+1}^{M_{n+1}}\frac{1}{k^2}\right)^{1/2}<\infty.$$

Следовательно, по теореме Леви, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sum_{k=M_n+1}^{M_{n+1}}\frac{1}{k}\sin kx\sin ky\right|$$

сходится почти всюду на Q.

Нетрудно также построить ряд, обладающий такими же свойствами, для любой заранее взятой монотонно возрастающей последовательности натуральных чисел M_n, удовлетворяющих лишь условию

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(M_{n+1}-M_n)=+\infty.$$

Дело, как видно из вышеприведенных рассуждений, сводится к построению числовой последовательности a_k, удовлетворяющей условиям:

1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_k|=+\infty$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{k=M_n+1}^{M_{n+1}}a_k^2\right)^{1/2}<\infty$.

Такой пример легко построить.

В этой заметке мы сперва формулируем одно утверждение, являющееся обобщением вышеуказанного результата Панферова, потом описываем некоторый класс плоских множеств меры нуль, на которых двойная тригонометрическая система обладает обобщенным D-свойством.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть 2π—периодические функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)\in\in L_2[0,\,2\pi]$ удовлетворяют следующим условиям:*

а) $\varphi(x),\ \psi(x)\neq\mathrm{const}$

б) $\varphi(x),\ \psi(x)\neq 0$ *почти всюду.*

Тогда для любого правильного разбиения $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ такого, что $\overline{\overline{N}}_k\leqslant C(k=1,\,2,\,\ldots)$, система $\Phi_{mn}(x,\,y)=\varphi(mx-\alpha_m)\cdot\psi(ny-\beta_n)$ обладает обобщенным D-свойством на любом множестве положительной плоской меры (α_m и β_n произвольные действительные числа).

Доказательство этой теоремы опирается на следующую лемму:

Пусть $\varphi(x)\in L^2[0,\,2\pi]$, $\varphi(x)\neq\mathrm{const}$, m—натуральное число. $E\subset\subset[0,\,2\pi]$—множество положительной меры и $p_0>0$.

Тогда для всех $N\geqslant N_0(m,\,E,\,\varphi,\,p_0)$ справедливо неравенство

$$\left\{\sum_{k=N+k}^{N+m}a_k^2\right\}^{1/2}\leqslant C(m,\,E,\,\varphi,\,p_0)\cdot\left\{\int\!\!\int_E\left|\sum_{k=N+1}^{N+m}a_k\varphi(n_kx-\alpha_k)\right|^{p_0}dx\right\}^{1/p_0}, \qquad (1)$$

где $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ произвольная последовательность отличных друг от друга натуральных чисел.

Эта лемма является усилением леммы 2.8 из ([3]), в которой в правой части (1) вместо $\varphi(n_kx-\alpha_k)$ фигурирует выражение $\varphi(kx-\alpha_k)$, но доказывается точно так же, только вместо леммы 1.3 из ([1]) нужно применить следующую лемму А. С. Белова ([4]):

Пусть

$$P(x)=\sum_{n=1}^{m}c_ne^{i\lambda_nx},$$

где $c_1,\ldots,c_k$ произвольные комплексные, а $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ действительные числа, причем

$$|\lambda_{n_1}-\lambda_{n_2}|\geqslant\Delta>0,\ n_1\neq n_2.$$

Пусть далее $E\subset J$, $|E|>0$, где J—произвольный сегмент на действи-

тельной прямой. Тогда для любой функции $\varphi(x)\uparrow(\geqslant 0)$, $x\in[0,+\infty)$ *и любого числа* $\eta\in(0,1]$

$$\frac{1}{|E|}\int\limits_{E}\varphi(|P(x)|)dx\geqslant(1-\eta)\cdot\varphi(A_2(m,\ \Delta,\eta\cdot|E|,\ |J|)\cdot\max_{1\leqslant n\leqslant m}|c_n|,$$

где

$$A_2(m,\ \Delta,\ \eta\cdot|E|,\ |J|)\geqslant\left(\frac{|E|}{3\cdot|J|}\right)^{2^m-1}\cdot\left(\min\left(\frac{\Delta\cdot|J|}{2\pi},\ 1\right)\right)^{m-1}.$$

В работе ([3]), в частности, установлено, что если ряд

$$\sum_{m,n=1}^{\infty}|A_{mn}(x,\ y)|,\tag{2}$$

где

$$A_{mn}(x,\ y)=a_{mn}\sin mx\sin ny+b_{mn}\sin mx\cos ny+c_{mn}\cos mx\sin ny+$$
$$+d_{mn}\cos mx\cos ny,$$

сходится на множестве точек $(x,\ f(x))$, где $x\in E$, $E\subset[0,\ 2\pi]$ и $|E|>0$, а $f(x)$—непрерывно дифференцируемая на $[0,\ 2\pi]$ функция, удовлетворяющая условиям

1) $f'(x)\geqslant q>0$ при $x\in[0,\ 2\pi]$;

2) $f'(x)$ строго монотонно возрастает на $[0,\ 2\pi]$,

то

$$\sum_{m,n=1}^{\infty}|a_{mn}|+|b_{mn}|+|c_{mn}|+|d_{mn}|<\infty.\tag{3}$$

Оказывается, этот результат можно усилить: а именно, вместо сходимости ряда (2) можно требовать сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\sum_{(m,n)\in N_k}A_{mn}(x,\ y)\right|,$$

где N_k удовлетворяют условиям теоремы 1. Тогда при тех же ограничениях на $f(x)$ справедливо (3).

В заключение отметим, что часть результатов этой заметки доложена нами на международной конференции по теории аппроксимаций и функциональным пространствам в г. Гданьске (ПНР) в 1979 г.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Ռ. Ա. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ

Ֆունկցիոնալ հաջորդականությունների ընդհանրացված D-հատկության մասին

Հոդվածում բերվում են բավարար տիպի պայմաններ, որոնց դեպքում կրկնակի ֆունկցիոնալ սիստեմը օժտված կլինի ընդհանրացված D-հատկությամբ:

Ձևակերպված են հետևյալ 2 պնդումները.

1. Եթե $\varphi(x)$ և $\psi(x)$ 2π-պարբերական ֆունկցիաները բավարարում են որոշակի պայմանների, ապա $\Phi_{mn}(x, y)=\varphi(mx-\alpha_m)\cdot\psi(ny-\beta_n)$ կրկնակի սիստեմը օժտված է ընդհանրացված D-հատկությամբ ցանկացած դրական չափի հարթ բազմության վրա։

2. Եթե $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը խիստ ուռուցիկ կոր է, ապա $A_{mn}(x, y)$ կրկնակի եռանկյունաչափական սիստեմը օժտված է ընդհանրացված D-հատկությամբ այդ կորի վրա գտնվող գծային դրական չափի ցանկացած բազմության վրա։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Р. А. Аветисян*, Изв. АН АрмССР, т. XI, № 3 (1976). [2] *Г. Алексич*, Проблемы сходимости ортогональных рядов, ИЛ, М., 1963. [3] *С. Б. Стечкин, П. Л. Ульянов*, Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, т. 86, (1965). [4] *А. С. Белов*, «Anal. math.», т. 5, № 2 (1979). [5] *Р. А. Аветисян*, Мат. сб., т. 110 (152), № 2 (10) (1979).