

УДК 539.311

МЕХАНИКА

В. А. Арсенян

О напряжениях в бесконечной плоскости и в весоной полуплоскости, ослабленных двумя прямоугольными отверстиями

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР О. М. Сапонджяном 15/IX 1981)

1. Рассмотрим упругую бесконечную плоскость с двумя симметрично расположенными прямоугольными отверстиями, по краям которых приложены равномерно-распределенные нормальные усилия. Расстояние центра тяжести каждого прямоугольника L_k ($k=1, 2$) с основанием b и высотой h (рис. 1) от начала координатных осей OX и OY обозначим через R ($R > b/2$).

Для решения поставленной задачи в упругой бесконечной области S будем искать две аналитические функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, которые имеют известные представления ⁽¹⁾. При этом граничные условия поставленной задачи почти всюду на L приводятся к следующему интегральному уравнению:

$$\omega(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \omega(t) d \ln \frac{t-t_0}{\bar{t}-\bar{t}_0} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \overline{\omega(t)} d \frac{t-t_0}{\bar{t}-\bar{t}_0} + \sum_{k=1}^2 \frac{b_k}{t_0 - z_k} = pt_0 + C_k; \quad z_1 = R; \quad z_2 = -R; \quad (1.1)$$

$$b_k = \frac{1}{2\pi i M_k} \int_{\tilde{L}_k} \{\omega(t) d\bar{t} - \overline{\omega(t)} dt\}; \quad C_k = -\frac{1}{N_k} \int_{L_k} \omega(t) ds. \quad (1.2)$$

Здесь $\omega(t)$ — подлежащая определению комплексная непрерывная функция. В окрестности угловых точек a_{kj} ($k=1, 2$; $j=1, 2, 3, 4$) $\omega(t)$ имеет следующую асимптотику ⁽²⁾:

$$\omega(t) = A_{kj} \left(\frac{t-a_{kj}}{T_{kj}-a_{kj}} \right)^\lambda + \sum_{r=0}^{\infty} B_{kj}^{(r)} \left(\frac{t-a_{kj}}{T_{kj}-a_{kj}} \right)^r, \quad (1.3)$$

где T_{kj} — фиксированные точки на контуре L_k , удовлетворяющие условиям $\arg(T_{kj}-a_{kj}) = \arg(t-a_{kj})$; $\lambda = 0,5445$ — постоянная, являющаяся корнем характеристического уравнения $\sin^2 \lambda \alpha = \lambda^2 \sin^2 \alpha$ с наименьшей положительной действительной частью для угла $\alpha = 3/2 \pi$.

В (1.2) M_k и N_k — действительные постоянные, выбираемые по удобству ⁽³⁾ в процессе решения (1.1).

Учитывая циклическую симметрию задачи, уравнение (1.1) приводим к виду ⁽⁴⁾:

$$\omega(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \omega(t) dK_1(t, t_0) - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \overline{\omega(t)} dK_2(t, t_0) + \sum_{k=1}^2 \frac{b_k}{t_0 - z_k} = pt_0 + C_1; \quad (1.4)$$

$$K_1(t, t_0) = \ln \frac{t-t_0}{t-\bar{t}_0} - \ln \frac{t+t_0}{t+\bar{t}_0}; \quad K_2(t, t_0) = \frac{t-t_0}{t-\bar{t}_0} - \frac{t+t_0}{t+\bar{t}_0}, \quad (1.5)$$

где плотность $\omega(t)$ определяется только в точках верхней половины контура L_1 . Значения ее в точках нижней половины контура L_1 определяются из условия зеркальной симметрии: $\omega(t'_0) = \overline{\omega(t_0)}$, для $t'_0 = \bar{t}_0 \in L_1$.

Интегралы, входящие в (1.4), понимаются в смысле Стильеса. Как показано в (2), к интегральному уравнению (1.4) можно применять теорию Фредгольма. Будем решать это уравнение методом последовательных приближений.

Для численного решения (1.4) на сторонах l_k ($k=1, \dots, 4$) прямоугольника L_1 (рис. 1) равномерным делением выбираются точки, соответственно числом n_1, n_2, n_3 и $n_4 = n_2$. Их будем называть основными опорными точками (ООТ). Эти точки не совпадают с угловыми. Для решения (1.4) построим последовательные приближения, заменив в (1.4) интегралы Стильеса интегральными суммами Стильеса. При этом будем иметь:

$$\begin{aligned} \omega_0(t_{0j}) = p t_{0j}; \quad \omega_N(t_{0l}) = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^m \omega_{N-1}(t_{0i}) \{K_1(t_{i+1}, t_{0l}) - K_1(t_i, t_{0l})\} + \\ + \frac{1}{2\pi i} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^m \overline{\omega_{N-1}(t_{0i})} \{K_2(t_{i+1}, t_{0l}) - K_2(t_i, t_{0l})\} - \frac{b_1}{t_{0l} - R} - \frac{b_1}{\bar{t}_{0l} + R} + C_1; \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$j = 1, 2, \dots, n; \quad n = \sum_{k=1}^4 n_k; \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad m = \sum_{k=1}^4 m_k; \quad m_k > n_k.$$

С целью повышения точности вычислений интегральные суммы, входящие в (1.6), вычисляются на более мелкой сетке дополнительных опорных точек (ДОТ) общим числом m , включающей в себя точки ООТ (ср. (3)). Причем на отрезках длиной Δ_k ($\Delta_k = l_k/n_k$, $k=1, \dots, 4$), примыкающих к угловым точкам, вводится локальная сетка с переменным шагом (6). Вычисление всех итераций (1.6) производится только в точках ООТ, а в точках ДОТ они определяются интерполированием. Для этого на средних участках сторон l_k строятся кубические сплайны, а на крайних ее участках используются представления (1.3).

Результаты вычислений на ЭВМ, проведенные для шести различных расстояний $d = 2R - b$ между границами двух одинаковых отверстий с размерами $b = 1, 2$ и $h = 0,8$, при $\nu = 2$ в (1.3), приведены в табл. 1.

Значения тангенциальных нормальных напряжений $\tau(t_i)/p$ ($i = 1, 2, \dots, 7$) приведены в следующих характерных точках контура: $t_1 = d/2$; $t_2 = (d + i(h - h/n_1))/2$; $t_3 = (d + b/n_2 + ih)/2$; $t_4 = R + ih/2$; $t_5 = (2R + b - b/n_2 + ih)/2$; $t_6 = t_2 + b$; $t_7 = t_1 + b$. В табл. 1 приведены также максимальные погрешности δ в процентах от напряжений p , полученные при проверке граничного условия задачи, при числе итераций N . Для случая $\nu = 0,2$ на рис. 1, 2 показаны линии равных напряжений $\sigma_{\max}/p$, $\sigma_{\min}/p$ и $\tau_{\max}/p$, определяемых формулами:

d	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2
M_1	3.0	2.75	2.5	2.25	2.0	1.75
N_1	22.5	20.625	18.75	16.875	15.0	13.125
n_1	22	26	30	32	36	40
n_2	30	30	30	30	30	30
n_3	42	42	42	40	40	40
$\delta\%$	2.9	3.6	3.6	2.9	3.7	4.0
N	43	53	45	50	39	35
$\sigma_y(t_1)/p$	-2.28	-1.46	-0.95	-0.63	-0.44	-0.31
$\sigma_y(t_2)/p$	-2.79	-2.72	-2.71	-2.63	-2.70	-2.71
$\sigma_x(t_3)/p$	-0.18	-0.46	-0.74	-0.92	-1.09	-1.21
$\sigma_x(t_4)/p$	0.5	0.5	0.49	0.48	0.47	0.45
$\sigma_x(t_5)/p$	-1.65	-1.58	-1.54	-1.50	-1.49	-1.48
$\sigma_y(t_6)/p$	-3.13	-2.92	-2.82	-2.71	-2.65	-2.60
$\sigma_y(t_7)/p$	-0.26	-0.18	-0.14	-0.11	-0.09	-0.07

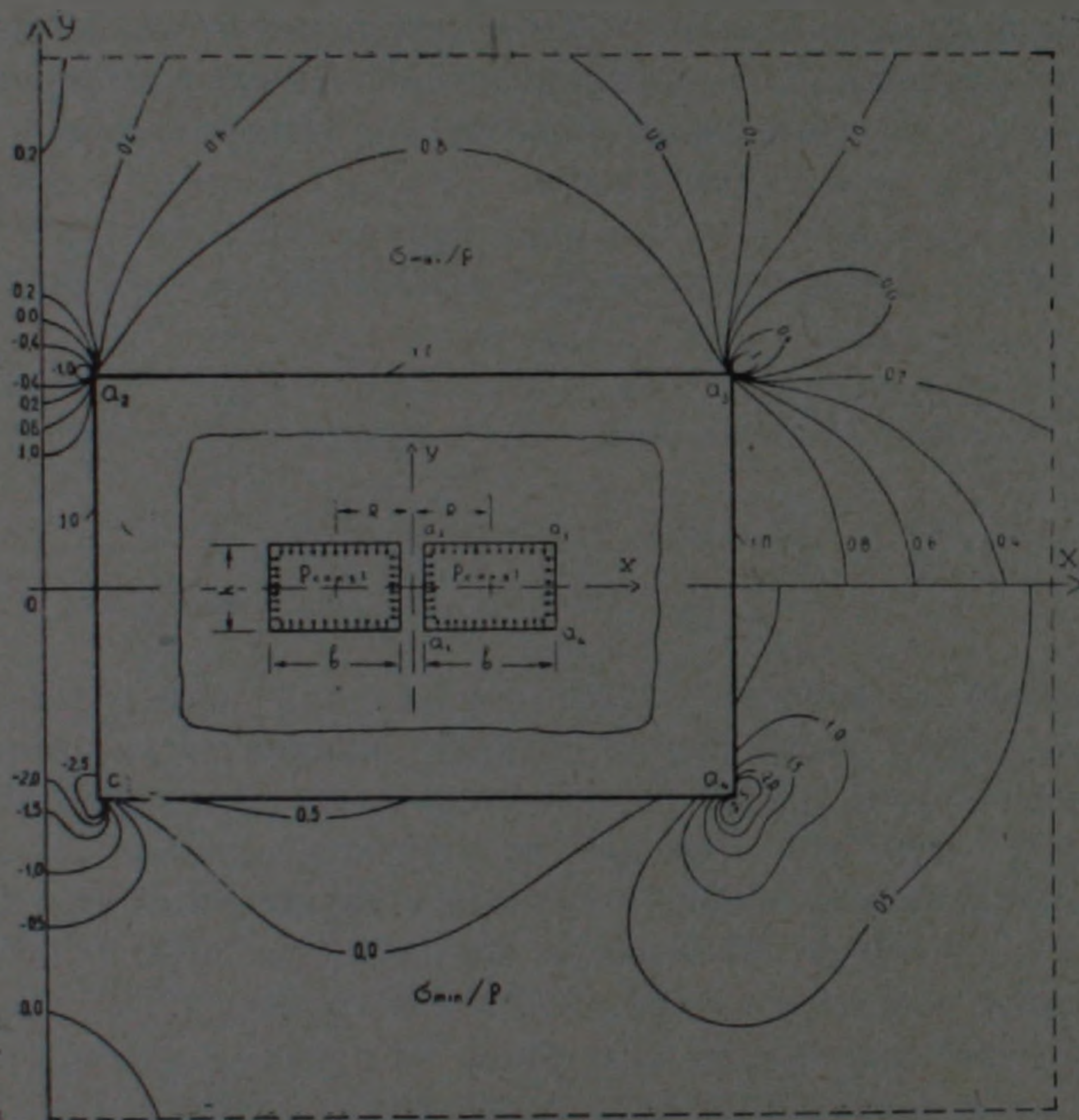


Рис. 1

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}; \quad \tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \quad (1.7)$$

Приведем результаты численного эксперимента, позволяющего определить влияние значения λ , показателя главного члена асимптотики (1.3), на точность выполнения граничного условия задачи. Для этого показателю λ задавались несколько значений и при каждом из них, вычислив итерации (1.6), проверялись граничные напряжения. Вычисления показали, что наивысшая точность получается, когда $\lambda = 0,5445$, т.е. является корнем трансцендентного уравнения $\sin^2 \lambda a =$

$\approx \lambda^2 \sin^2 \alpha$ при $\alpha = 3/2 \pi$, причем это подтверждалось при различных расстояниях d между границами отверстий. В табл. 2 приведены максимальные погрешности $\delta(d)$ (при $d=0,2; 0,4; 0,6$) выполнения граничного условия в процентах от p , при нескольких значениях λ .

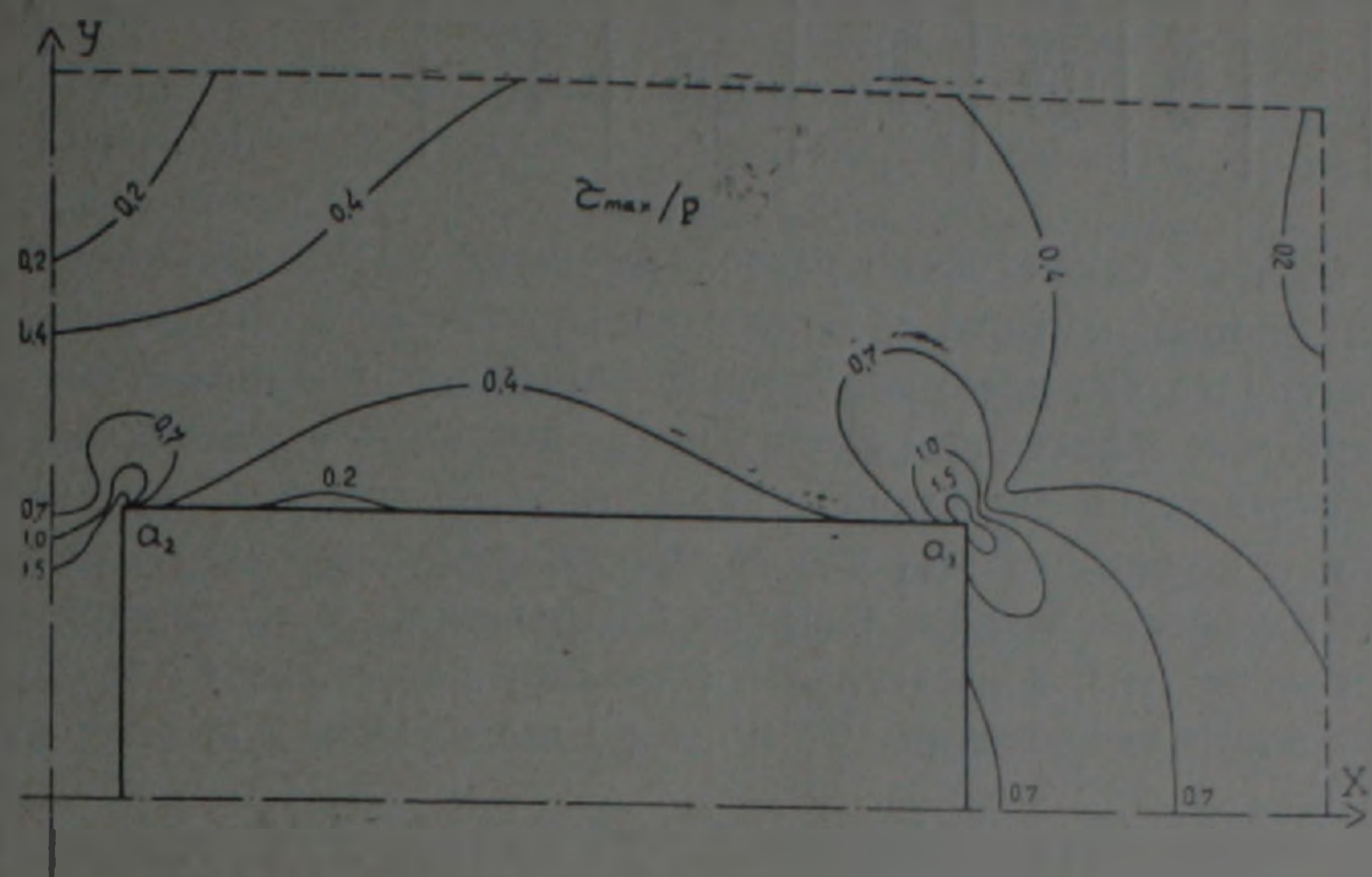


Рис. 2

Таблица 2

λ	0.4	0.5	0.5445	0.6	0.7	0.8
$\delta(0,2) \%$	7.4	6.0	2.9	3.7	8.0	11.8
$\delta(0,4) \%$	5.9	4.1	1.5	2.0	5.9	9.6
$\delta(0,6) \%$	6.0	4.1	1.0	1.9	5.6	8.9

Отметим, что точность численного решения (1.4) зависит как от использования асимптотики (1.3), так и от выбора сетки разбиения всего контура. Выбор сетки нужно контролировать проверкой точности выполнения граничного условия задачи. Анализ решений этой задачи показывает, что в окрестности угловых точек требуется ввести локальную дискретизацию контура, согласно асимптотике решения в окрестности этих углов. Поведение плотности и ее производных на отдельных сторонах прямоугольника зависит как от внешней нагрузки, так и от отношения размеров этих сторон и расстояния между отверстиями. Вследствие этого поведение плотности и ее производной на разных сторонах прямоугольника различно. Это приводит к необходимости введения различной дискретизации контура.

В табл. 3 приведены значения максимальных погрешностей $\delta(l_i)$ выполнения граничного условия в процентах от p , вычисленные в тех же характерных точках l_i контура, рассмотренных в табл. 1, при разных соотношениях числа точек ООТ на сторонах прямоугольника.

Приведенные в табл. 3 результаты соответствуют случаю $d=0,2$. Как видно из этой таблицы, точность решения зависит от отношений n_1/n_2 и n_2/n_3 . При $n_1/n_2=2/3$ и $n_2/n_3=3/4$ получается наименьшая погрешность при общем числе точек, не превосходящем 130.

2. Рассмотрим теперь задачу о равновесии весомой полуплос-

n_1	n_2	n_3	$\bar{z}(t_1)\%$	$\bar{z}(t_2)\%$	$\bar{z}(t_3)\%$	$\bar{z}(t_4)\%$	$\bar{z}(t_5)\%$	$\bar{z}(t_6)\%$	$\bar{z}(t_7)\%$
20	30	20	2,0	2,6	2,8	1,3	2,6	11,5	5,2
30	35	30	3,4	15,9	2,0	1,3	2,1	8,3	1,6
40	20	30	11,0	19,7	5,8	4,7	2,1	2,4	5,0
20	30	40	2,1	2,7	2,5	1,2	0,6	1,7	0,9

кости с двумя симметрично расположенными прямоугольными отверстиями, центры которых удалены на расстояние f от границы L_0 . В данном случае нас преимущественно интересует напряженное состояние среды в окрестности контуров L_k , достаточно удаленных от L_0 . Так как отверстия достаточно удалены от L_0 , то без заметной погрешности можно считать, что в точках среды, примыкающих к L_0 , нормальные составляющие напряжений равны σ_x^∞ и σ_y^∞ (напряжениям на бесконечности), а касательная составляющая равна нулю (⁷).

Искомые напряжения $\sigma_x^{(1)}$, $\sigma_y^{(1)}$ и $\tau_{xy}^{(1)}$ представим в виде суммы (⁷):

$$\sigma_x^{(1)} = \sigma_x^0 + \sigma_x; \quad \sigma_y^{(1)} = \sigma_y^0 + \sigma_y; \quad \tau_{xy}^{(1)} = \tau_{xy}^0 + \tau_{xy}, \quad (2.1)$$

где σ_x^0 , σ_y^0 и τ_{xy}^0 — напряжения в сплошной весомой среде, удовлетворяющие указанным условиям на бесконечности и определяемые формулами:

$$\sigma_x^0 = n\rho g(y-f) + \sigma_x^\infty; \quad \sigma_y^0 = \rho g(y-f) + \sigma_y^\infty; \quad \tau_{xy}^0 = 0. \quad (2.2)$$

В (2.2) n — постоянная, зависящая от упругих свойств среды, ρ — плотность среды, g — ускорение силы тяжести. Напряжения σ_x , σ_y и τ_{xy} в (2.1) обусловлены наличием отверстий.

Следуя (⁷), напряжения σ_x , σ_y и τ_{xy} можем определить с помощью упругих потенциалов $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, аналитических в бесконечной области S и исчезающих на бесконечности, заменив полубесконечную область, занятую упругой средой, на бесконечную плоскость. При этом граничное условие задачи записывается только на контурах отверстий и имеет вид (⁷):

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = (k_1 + k_2)t/2 - (k_1 - k_2)\overline{t}/2; \quad (2.3)$$

$$k_1 = n\rho g f - \sigma_x^\infty; \quad k_2 = \rho g f - \sigma_y^\infty. \quad (2.4)$$

Рассмотрим случай, когда $n=1$ и $\sigma_x^\infty = \sigma_y^\infty = \sigma^\infty$. Тогда в правой части (2.3) $f(t) = (\rho g f - \sigma^\infty)t = p_1 t$, что по существу совпадает с правой частью $f(t) = pt$ уравнения (1.1) предыдущей задачи. Исходя из этого, используем результаты предыдущей задачи и искомые напряжения определим формулами:

$$\sigma_x^{(1)} = (\sigma_x/p - 1)p_1; \quad \sigma_y^{(1)} = (\sigma_y/p - 1)p_1; \quad \tau_{xy}^{(1)} = \tau_{xy}p_1/p, \quad (2.5)$$

где σ_x/p , σ_y/p и τ_{xy}/p — решения в окрестности контуров L_k , полученные для случая равномерно-распределенного нагружения по контурам отверстий.

Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

Երկու ուղղանկյունաձև անցքերով թուլացված անվերջ հաբթությունում և կշիռ ունեցող կիսահաբթությունում առկա լարումների մասին

Թվային եղանակով լուծվում է Շերման-Լաուրիշելայի ինտեգրալ հավասարումը երկու ուղղանկյունաձև անցքերով թուլացված անվերջ տիրույթի համար, երբ անցքերի եզրագծերի վրա կիրառված են հավասարաչափ բաշխված նորմալ լարումներ: Հնդ որում դիտարկվում են անցքերի միջև տարբեր հեռավորությունների մի քանի դեպքեր:

Աշխատանքում ցույց է տրվում, թե ինչպես ինտեգրալ հավասարման լուծման ասիմպտոտիկայի հաշվառումը թվային լուծման մեջ բերում է այդ հավասարման էֆեկտիվ լուծմանը անկյուններ ունեցող տիրույթի համար:

Դիտարկվում է նաև կշիռ ունեցող կիսահաբթության խնդիրը, երբ այն թուլացված է նրա եզրագծից բավականաչափ հեռու գտնվող երկու ուղղանկյունաձև անցքերով: Որոշ պայմանների դեպքում այս խնդիրը բերվում է նախորդ դեպքին:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Д. И. Шерман, ДАН СССР, т. 28, № 1 (1940). ² С. С. Заргарян, V' всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике, Аннотации докладов, Наука, Алма-Ата, 1981. ³ В. А. Арсенян, С. С. Заргарян, В. Р. Мартirosян, Изв. АН СССР, МТТ, № 1, 1982. ⁴ В. М. Буйвол, Прикл. механика, т. 5, № 3 (1959). ⁵ С. Ф. Ступак, в кн.: Механика твердого деформируемого тела и родственные проблемы анализа, МИХМ, М., 1978. ⁶ В. А. Арсенян, Мужвузовский сб. «Механика», изд. Ереванск. гос. ун-та, т. 1, 1981. ⁷ Д. И. Шерман, Изв. АН СССР, ПММ, т. 15, вып. 3, 1951.