

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

В. М. Караханян

Дискретная изопериметрическая задача на многомерном торе

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 8/XI 1981)

В данной работе рассматривается изопериметрическая задача⁽¹⁾ на n -мерном дискретном торе.

Для произвольных целых чисел $1 < l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq l_n \leq +\infty$ многозначный n -мерный тор определяется как множество

$$T_{l_1, l_2, \dots, l_n}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) / -[(l_i - 1)/2] \leq x_i \leq [l_i/2], x_i - \text{целые}, 1 \leq i \leq n\},$$

в котором вершины $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ считаются соседними, если все их координаты одинаковы, кроме одной, для которой $|x_i - y_i| \equiv 1 \pmod{l_i}$.

Пусть $A \subseteq T_{l_1, l_2, \dots, l_n}^n$ некоторое подмножество; скажем, что вершина $x \in A$ внутренняя, если все ее соседние вершины принадлежат подмножеству A . В противном случае вершину $x \in A$ назовем граничной вершиной подмножества A . Обозначим через $B(A)$ и $\Gamma(A)$ соответственно множество всех внутренних и граничных вершин подмножества A .

Дискретная изопериметрическая задача в многозначном n -мерном торе $T_{l_1, l_2, \dots, l_n}^n$ по произвольному заданному целому числу a , $0 \leq a \leq |T_{l_1, l_2, \dots, l_n}^n|$, требует найти такое подмножество $A \subseteq T_{l_1, l_2, \dots, l_n}^n$, $|A| = a$, что

$$|B(A)| = \max_{\substack{A' \subseteq T_{l_1, l_2, \dots, l_n}^n \\ |A'| = a}} |B(A')|.$$

Решение этой задачи при $l_1 = l_2 = \dots = l_n = 2$ дано в (1-3), а при $l_1 = l_2 = \dots = l_n = +\infty$ — в (6). В данной работе приводится решение изопериметрической задачи, когда все l_i , $1 \leq i \leq n$, произвольные четные числа или $l_i = +\infty$. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что $l_i = 2k_i$ для любого i , $1 \leq i \leq n$, т. е.

$$T_{l_1, l_2, \dots, l_n}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) / -k_i + 1 \leq x_i \leq k_i, x_i - \text{целые}, 1 \leq i \leq n\},$$

где $1 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_n \leq +\infty$ и тогда условно будем писать $T_{k_1, k_2, \dots, k_n}^n = T_{l_1, l_2, \dots, l_n}^n$.

Определим для векторов x и $y \in T_{k_1, k_2, \dots, k_n}^n$ их сумму и разность $z = x \pm y = (x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2, \dots, x_n \pm y_n) = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, где $-k_i + 1 \leq z_i \leq k_i$ и $z_i \equiv (x_i \pm y_i) \pmod{2k_i}$, когда k_i конечное число и $x_i \pm y_i$

обычные операции сложения и вычитания для целых чисел, когда $k_i = +\infty$.

Нормой вершины $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ назовем число $\|x\| = \sum_{i=1}^n |x_i|$, а расстоянием между вершинами x и y — число $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

Обозначим $|x| = (|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$, $\delta(x) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, где $\alpha_i = 1$ при $x_{n-i+1} > 0$ и $\alpha_i = 0$ при $x_{n-i+1} \leq 0$, и определим линейный порядок между вершинами $T_{k_1 k_2 \dots k_n}^n$ следующим образом:

$x \prec y$ (x предшествует y) тогда и только тогда, когда

1) $\|x\| < \|y\|$, или

2) $\|x\| = \|y\|$ и $\delta(y)$ лексикографически предшествует $\delta(x)$, или же

3) $\|x\| = \|y\|$, $\delta(x) = \delta(y)$ и $|y|$ лексикографически предшествует $|x|$.

Множество первых a вершин линейного порядка назовем стандартным размещением мощности a .

Лемма 1. Если A стандартное размещение, то внутренние вершины множества A предшествуют его граничным вершинам.

Рассмотрим произвольное стандартное размещение A и его разбиение $A = \bigcup_{j=-k_i+1}^{k_i} A_i(j)$ по i -ому направлению, $1 \leq i \leq n$, где $A_i(j) = \{x \in A / x_i = j\}$. Обозначим через $B(A_i(j))$ подмножество внутренних вершин множества $A_i(j)$ в $(n-1)$ -мерном торе $T_i^n(j) = \{x \in T_{k_1 k_2 \dots k_n}^n / x_i = j\}$, через e_i — единичный вектор i -ого направления и через $A \pm j e_i$ — множество $\{x \pm j e_i / x \in A\}$. Тогда

1°. каждое множество $A_i(j)$ есть стандартное размещение в $T_i^n(j)$;

2°. для любого j , $1 \leq j < k_n$, $A_n(-j) + e_n \subseteq B(A_n(-j+1))$;

3°. для любого j , $1 < j \leq k_n$, $A_n(j) - e_n \subseteq B(A_n(j-1))$;

4°. для любого j , $0 \leq j < k_n$, $A_n(-j) \supseteq A_n(j+1) - (2j+1)e_n \supseteq B(A_n(-j))$ или $A_n(-j) = T_n^n(-j)$ и $A_n(j+1) = T_n^n(j+1) \setminus \{(k_1, k_2, \dots, k_{n-1}, j+1)\}$;

5°. для любого j , $0 < j < k_n$, $A_n(j) \supseteq A_n(-j) + 2j e_n \supseteq B(A_n(j))$ или $A_n(j) = T_n^n(j)$ и $A_n(-j) = T_n^n(-j) \setminus \{(k_1, k_2, \dots, k_{n-1}, -j)\}$.

Из указанных свойств стандартного размещения следует

Лемма 2. Если A стандартное размещение и $|A| < |T_{k_1 k_2 \dots k_n}^n| - 1$, то

$$|B(A)| = |A| - |A_n(0)| - |A_n(1)| + |B(A_n(-k_n+1))| + |B(A_n(k_n))|.$$

Для двоичного набора $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ подмножество

$$\alpha(T_{k_1 k_2 \dots k_n}^n) = \{x \in T_{k_1 k_2 \dots k_n}^n / \delta(x) = \alpha\}$$

будем называть α -частью тора $T_{k_1 k_2 \dots k_n}^n$.

Для $x, y \in \alpha(T_{k_1 k_2 \dots k_n}^n)$ определим их сумму как $x \oplus y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, где $x_i + y_i \equiv z_i \pmod{k_i}$, $1 \leq z_i \leq k_i$ при $\alpha_i = 1$ и $-k_i + 1 \leq z_i \leq 0$ при $\alpha_i = 0$ для любого i , $1 \leq i \leq n$.

Шаром (соответственно оболочкой) в α -части с центром в точке $x \in \alpha(T_{k_1 k_2 \dots k_n}^n)$ и радиусом k назовем подмножество

$$S_\alpha^n(x, k) = \left\{ y = x \oplus r_1 e_1 \oplus r_2 e_2 \oplus \dots \oplus r_n e_n / \sum_{i=1}^n |r_i| \leq k \right\}$$

(соответственно подмножество $O_\alpha^n(x, k) = S_\alpha^n(x, k) / S_\alpha^n(x, k-1)$), где r_i — целые числа, $r_i \geq 0$ при $\alpha_i = 1$ и $r_i \leq 0$ при $\alpha_i = 0$.

Множество $O^n(x, k) = \{y \in T_{k_1 k_2 \dots k_n}^n / \rho(x, y) = k\}$ назовем просто оболочкой с центром x и радиусом k .

Ясно, что определенный выше линейный порядок между вершинами $T_{k_1 k_2 \dots k_n}^n$ в каждой α -части совпадает с диагональной последовательностью, определенной в (7), начальный отрезок которой снова назовем стандартным размещением. Поэтому, если определим подмножество внутренних вершин множества $A \subseteq \alpha(T_{k_1 k_2 \dots k_n}^n)$ как $\{x \in A / S_\alpha^n(x, 1) \subseteq A\} = B_\alpha(A)$, то, используя результаты (7), может быть доказана

Лемма 3. Если A, C, D и E такие стандартные размещения в α -частях, что $|C| \geq |A| \geq |D| \geq |E|$, $|A| + |D| = |C| + |E|$ и C или E шар в α -части, то

$$|B_\alpha(C)| + |B_\alpha(E)| \geq |B_\alpha(A)| + |B_\alpha(D)|.$$

Доказанные свойства стандартного размещения вершин n -мерного тора $T_{k_1 k_2 \dots k_n}^n$ позволяют доказать следующую теорему.

Теорема 1. Если $A \subseteq T_{k_1 k_2 \dots k_n}^n$ стандартное размещение, а $C \subseteq T_{k_1 k_2 \dots k_n}^n$ произвольное множество мощности $|A|$, то

$$|B(A)| \geq |B(C)|.$$

Теорема доказывается индукцией по n . Причем общий шаг индукции выводится для $n \geq 3$ и отдельно доказывается теорема для двухмерного случая. При $n=1$ утверждение теоремы тривиально.

Обозначим $|O^n(x, k)| = F_n^k(k_1, k_2, \dots, k_n)$ и $|O_\alpha^n(x, k)| = f_n^k(k_1, k_2, \dots, k_n)$, в частности $F_n^k(k_1, k_2, \dots, k_n) = f_n^k(k_1, k_2, \dots, k_n) = 0$, если k не удовлетворяет условию $0 \leq k \leq \sum_{i=1}^n (k_i - 1) = K$. Ясно, что

$$F_n^k(k_1, k_2, \dots, k_n) = \sum_{a \in E^n} f_n^{k - \|a\|}(k_1, k_2, \dots, k_n),$$

где E^n — n -мерный единичный куб. Числа $f_n^k(k_1, k_2, \dots, k_n)$, $k=0, 1, \dots, K$, определяются из следующего равенства (см. (8)):

$$\begin{aligned} (1+t+t^2+\dots+t^{k_1-1})(1+t+t^2+\dots+t^{k_2-1})\dots(1+t+t^2+\dots+t^{k_n-1}) = \\ = \sum_{k=0}^K f_n^k(k_1, k_2, \dots, k_n) t^k. \end{aligned}$$

Пусть множество A_1 — стандартное размещение мощности a_1 в α -части, $0 \leq a_1 \leq |\alpha(T_{k_1 k_2 \dots k_n}^n)| = \prod_{i=1}^n k_i$, а A_2 — стандартное размещение в

$T_{k_1 k_2 \dots k_n}^n$ мощности a_2 , $0 \leq a_2 \leq |T_{k_1 k_2 \dots k_n}^n| = 2^n \cdot \prod_{i=1}^n k_i$, тогда числа a_1 и a_2

можно представить в виде:

$$a_1 = \sum_{i=0}^k f_n^i(k_1, k_2, \dots, k_n) + b_1, \text{ где } 0 \leq b_1 < f_n^{k+1}(k_1, k_2, \dots, k_n); \quad (1)$$

$$a_2 = \sum_{i=0}^r F_n^i(k_1, k_2, \dots, k_n) + b_2, \text{ где } 0 \leq b_2 < F_n^{r+1}(k_1, k_2, \dots, k_n). \quad (2)$$

Если $0 \leq b_1 < f_n^{k+1}(k_1, k_2, \dots, k_n)$, то число b_1 можно единственным образом представить в виде

$$b_1 = \sum_{r=0}^{\mu} \sum_{j=0}^{l_r} f_n^{k - \sum_{i=1}^{n_r} k_i + n_r + r + j}(k_{n_r+1}, k_{n_r+2}, \dots, k_n),$$

где $1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_{\mu} < n$ и $0 \leq l_i < k_{n_i} - 1$ при $1 \leq i \leq \mu$. Согласно этому представлению число $p_k(b_1)$ — всех внутренних вершин стандартного размещения A_1 , принадлежащих оболочке $O_n^n(a, k)$, выражается в следующем виде

$$p_k(b_1) = \sum_{r=1}^{\mu} \sum_{j=0}^{l_r} f_n^{k - \sum_{i=1}^{n_r} k_i + n_r + r - 1 + j}(k_{n_r+1}, k_{n_r+2}, \dots, k_n). \quad (3)$$

Если $0 \leq b_2 < F_n^{r+1}(k_1, k_2, \dots, k_n)$, то число b_2 можно единственным образом представить в виде

$$b_2 = \sum_{i=1}^{\tau} \sum_{a \in E^{n-m_i}} f_n^{r-1+|a|-m_i+i}(k_1, k_2, \dots, k_n) + b_0,$$

где $1 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_{\tau} \leq n$ и $0 \leq b_0 < f_n^{k-n+\tau}(k_1, k_2, \dots, k_n)$. Согласно этому представлению и (3), число $P_r(b_2)$ — всех внутренних вершин стандартного размещения A_2 , принадлежащих оболочке $O^n(0, r)$, выражается в следующем виде:

$$P_r(b_2) = \sum_{i=1}^{\tau} \sum_{a \in E^{n-m_i}} f_n^{r-1+|a|-m_i+i-1}(k_1, k_2, \dots, k_n) + p_{k-n+\tau-1}(b_0). \quad (4)$$

Теорема 2. Если A_1 — стандартное размещение в α -части мощности (1), а A_2 — стандартное размещение в $T_{k_1 k_2 \dots k_n}^n$ мощности (2), то

$$|B_{\alpha}(A_1)| = \sum_{i=0}^{h-1} f_n^i(k_1, k_2, \dots, k_n) + p_h(b_1);$$

$$|B(A_2)| = \sum_{i=0}^{r-1} F_n^i(k_1, k_2, \dots, k_n) + P_r(b_2).$$

В заключение приношу искреннюю благодарность Л. А. Асланяну за постоянное внимание и полезные советы.

Вычислительный центр Академии наук
Армянской ССР и Ереванского государственного университета

Դիսկրետ իզոպերիմետրիկ խնդիրը բազմաչափ տոռում

Աշխատանքում դիտարկվում է դիսկրետ իզոպերիմետրիկ խնդիրը բազմաբարձեր n -չափանի տոռում: Ապացուցվում է, որ երբ տորի բոլոր ցիկլերը ունեն դույզ երկարություններ, ապա հնարավոր է տալ տորի գագաթների այնպիսի գծային կարգավորվածություն, որ վերջինիս կամայական հզորությամբ սկզբնահատվածներն իրենցից ներկայացնեն դիսկրետ իզոպերիմետրիկ խնդրի լուծումներ: Ստացվում է նաև լուծումների պարամետրիի կապը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Л. А. Асланян, В. М. Караханян, Б. Е. Торосян, ДАН СССР, т. 241, № 1 (1978). ² Л. А. Асланян, Проблемы кибернетики, вып. 36, М., 1979. ³ L. H. Harper, J. Combin. Theory, 1, p. 385—393 (1966). ⁴ F. B. Kruskal, Mathematical Optimization Techniques, p. 251—278 (1963). ⁵ G. Katona, Studia Scient. Math. Hungarica, 10, p. 131—140 (1975). ⁶ D. L. Wang, P. Wang, SIAM J. Appl. Math., vol. 32, № 4, p. 860—870 (1977). ⁷ D. L. Wang, P. Wang, SIAM Appl. Math., vol. 33, № 1, p. 55—59 (1977). ⁸ Дж. Риордан, Введение в комбинаторный анализ, Изд. иностр. лит, М., 1953.

