ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXIV 1982 2

УДК 519.46

МАТЕМАТИКА

О. М. Хосровян

Квазиравномерные подгруппы в полупростых группах Ли

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 26/X 1981)

Пусть G—связная полупростая вещественная линейная группа Ли. Связную замкнутую подгруппу $U\subset G$ будем называть квазиравномерной, если однородное пространство G/U имеет два конца в смысле Фрейденталя. Это равносильно тому, что $G/U\simeq M\times R$, где M—компактное многообразие [1]. В работе дается классификация всех квазиравномерных подгрупп с точностью до спряженности. Заметим, что случай, когда U—комплексная подгруппа Ли в комплексной полупростой группе Ли G, был изучен ранее [1,2]. На протяжении всей работы мы будем свободно переходить от языка групп Ли к языку алгебр Ли и обратно, используя следующие соглашения: группы Ли будем обозначать заглавными, а их алгебры Ли — соответствующими малыми латинскими буквами.

1. Мы будем использовать известное описание параболических подалгебр в полупростой алгебре g над R [3]. Пусть $g=k+p$—картановское разложение, где k—максимальная компактная подалгебра, и пусть h—картановская подалгебра в g, содержащая максимальную абелеву подалгебру $h_-\subset p$, $h=h_++h_-$, где $h_+\subset k$. Обозначим через Σ систему корней алгебры g^c отнотительно h^c и через Δ систему корней симметрического пространства G/K [4]. Ограничение $\rho:\alpha\to\alpha|h_-$ отображает Σ на Δ. Пусть $\Sigma_0=\Sigma\cap \ker\rho$, $\Sigma_1=\Sigma\setminus\Sigma_0$. Обозначим через $g_\alpha\subset g^c(\alpha\in\Sigma)$ и $g^\lambda\subset g(\lambda\in\Delta)$ соответствующие корневые подпространства. Введем в Σ упорядочение, инвариантно относительно естественной инволюции σ^*, порожденной комплексным сопряжением, перенесем его на Δ и обозначим через $\Pi\subset\Sigma$ и $\bar\Pi\subset\Delta$ соответствующие системы простых корней. Тогда $\Pi=\Pi_0\cup\Pi_1$, где $\Pi_0\subset\Sigma_0$, $\Pi_1\subset\Sigma_1$, $\rho(\Pi_1)=\bar\Pi$ и слой отображения $\rho:\Pi_1\to\bar\Pi$ совпадает с орбитами инволюции $\bar\sigma:\Pi_1\to\Pi_1$, индуцированной σ^*.

Известно, что любая параболическая подалгебра в g сопряжена стандартной параболической подалгебре u_Γ, где $\Gamma\subseteq\Pi_1$—произвольное $\bar\sigma$-инвариантное подмножество и

$$u_\Gamma=s_\Gamma+c_\Gamma+n_\Gamma;$$

при этом n_Γ—нильрадикал в u_Γ, $r_\Gamma=s_\Gamma+c_\Gamma$—редуктивная подалгебра Леви, s_Γ полупроста и c_Γ—центр в r_Γ. Имеем $c_\Gamma=c_\Gamma^++c_\Gamma^-$, где

$c_\Gamma^+ \subset h_\pm$, $c_\Gamma^c = \mathrm{Ann}(\Pi_0 \cup \Gamma)$. Далее, s_Γ — полупростая подалгебра в g, отвечающая подсистеме $\Pi_0 \cup \Gamma \subset \Pi$. Пусть $\Pi_0^{\cdot}$ — объединение всех связных компонент схемы $\Pi_0 \cup \Gamma$, состоящих из корней системы Π_0, и пусть $\Pi_0' = \Pi_0 \setminus \Pi_0^{\cdot}$. Тогда $s_\Gamma = s_\Gamma^n + s_\Gamma^k$, где s_Γ^n — идеал, отвечающий подсистеме $\Pi_0' \cup \Gamma$ и не содержащий нетривиальных компактных идеалов, а s_Γ^k — компактный идеал, отвечающий подсистеме $\Pi_0^{\cdot}$. Положим $r_\Gamma^k = s_\Gamma^k + c_\Gamma^+$. Наконец, $n_\Gamma = \sum_{\lambda \in \Delta^*} g^\lambda$, где Δ^* — система положительных корней из Δ, не выражающихся через $\bar{\Gamma} = \rho(\Gamma)$.

2. Опишем теперь четыре класса подалгебр u в полупростой алгебре Ли g над $\boldsymbol{R}$. Пусть выбрана некоторая $\bar{\sigma}$ — инвариантная подсистема $\Gamma \subseteq \Pi_1$ (или, что равносильно, некоторая подсистема $\bar{\Gamma} \subsetneq \bar{\Pi}$).

I. $u = s_\Gamma^n + q + n_\Gamma$, где q — подалгебра в $r_\Gamma^k + c_\Gamma^-$, причем $\dim p_{c_\Gamma^-} r q = \dim c_\Gamma^- - 1$.

II. Предположим, что s_Γ^n содержит простой идеал типа $so(1, n)$, где $n \geqslant 2$. Пусть $s_\Gamma^n = so(1, n) \oplus s'$ и $so(1, n-1) \subseteq so(1, n)$ — стандартно вложенная подалгебра. Тогда положим

$$u = (so(1, n-1) \oplus s') + q + n_\Gamma$$

где q — подалгебра в $r_\Gamma^k + c_\Gamma^-$ и $pr_{c_\Gamma^-} q = c_\Gamma^-$, если $n \geqslant 3$ и

$$u = s' + q + n_\Gamma,$$

где $q \subset so(1, 1) + c_\Gamma^- + r_\Gamma^k$ и $pr_{so(1,1)+c_\Gamma^-}\, q = so(1,1) + c_\Gamma^-$, если $n = 2$.

III. Пусть $\lambda \in \bar{\Pi} \setminus \bar{\Gamma}$ — корень, ортогональный к $\bar{\Gamma}$ (в частности, $\Gamma \neq \Pi_1$). Тогда положим

$$u = s_\Gamma^n + m + n + g^{2\lambda} + \sum_{\mu \in \Delta^* \setminus \{\lambda, 2\lambda\}} g^\mu,$$

где m — подалгебра в $r_\Gamma^k + c_\Gamma^-$, $p c_\Gamma^- r m = c_\Gamma^-$ и n — такое подпространство коразмерности 1 в g^λ, что $[m, n] \subset n$.

IV. Выбрав $\lambda \in \bar{\Pi}$, как в предыдущем пункте, положим

$$u = s_\Gamma^n + m + g^{2\lambda} + \sum_{\mu \in \Delta^* \setminus \{\lambda, 2\lambda\}} g^\mu,$$

причем $m \subset r_\Gamma^k + (c_\Gamma^- \cap \ker \lambda) + g^\lambda$ — подпространство, определяющее равномерную подалгебру в алгебре Ли $b = (r_\Gamma^k + (c_\Gamma^- \cap \ker \lambda) + g^\lambda + g^{2\lambda}) / g^{2\lambda}$. Очевидно, b — полупрямое произведение компактной и абелевой алгебр Ли. Равномерные подалгебры в таких алгебрах описаны в ([5]).

Теорема 1. *Если $U \subset G$ — связная замкнутая подгруппа в линейной полупростой группе Ли G, отвечающая одной из подалгебр типов* I—IV, *то U квазиравномерна.*

Доказательство основано на построении некоторых естественных расслоений многообразия G/U. В случаях I и III получаем главные расслоения с компактной однородной базой и слоем $\boldsymbol{R}$, в случае II — расслоение с компактной однородной базой и слоем $SO(1, n)/SO(1, n-1) = \boldsymbol{R} \times S^{n-1}$, при $n \geqslant 3$, или слоем $T^h \times \boldsymbol{R}$ при $n = 2$, в случае IV — расслоение с компактной однородной базой и слоем $T^k \times \boldsymbol{R}$.

3. Сформулируем наш основной результат.

Теорема 2. *Если U—квазиравномерная подгруппа полупростой линейной группы Ли G, то подалгебра $u \subset g$ сопряжена одной из подалгебр типов* I—IV *из* n°2.

Доказательство теоремы 2 разбивается на три этапа.

1) u—редуктивная подалгебра в g. Используя расслоение Карпелевича—Мостова и известную классификацию симметрических пространств, содержащих вполне геодезические подмногообразия коразмерности 1 ([6]), приходим к подалгебрам типа II (в предположении $\Gamma=\Pi_1$).

2) u—не редуктивняя алгебраическая подалгебра в g. Пусть $u=r+n$—разложение Леви алгебры Ли u, где n—нильрадикал. Как известно, мы можем считать, что $u \subset u_\Gamma$ для некоторой подсистемы $\Gamma \subset \Pi_1$, причем $r \subseteq s_\Gamma + c_\Gamma$, $n \subseteq n_\Gamma$. Используя естественные расслоения, получаем, что либо $n=n_\Gamma$, либо $\dim n_\Gamma - \dim n = 1$. В первом случае приходим к типам I и II, во втором—к типу III (с алгебраическими подалгебрами q и m).

3) u—не редуктивная и не алгебраическая. Тогда ее алгебраическое замыкание $\hat{u}$—не редуктивная алгебраическая подалгебра, причем она соответствует либо квазиравномерной, либо равномерной подгруппе в G. В первом случае u—одна из подалгебр типов I, II, IV, а во втором случае — подалгебра типа I.

Следствие. Пусть в предположениях теоремы 2 g—разложимая вещественная алгебра Ли. Тогда u сопряжена одной из подалгебр следующих трех типов ($\Gamma \subseteq \Pi = \bar{\Pi}$—некоторая подсистема):

I. $u = s_\Gamma + a + n_\Gamma$, где a—подпространство коразмерности 1 в c_Γ;

II. Γ содержит изолированный корень, т. е. $s_\Gamma = so(1, 2) \oplus s'$ и $u = (so(1, 1) \oplus s') + c_\Gamma + n_\Gamma$;

III. $u = s_\Gamma + c_\Gamma + \sum_{\gamma \in \Delta^+ \setminus \{\alpha\}} g^\gamma$, где $\alpha \in \Pi \setminus \Gamma$—корень, ортогональный к Γ.

В другом частном случае, когда g—комплексная полупростая алгебра Ли, теорема 2 дает новое доказательство основного результата работы ([2]).

4. Теорему 2 можно применить для описания транзитивных действий некомпактных полупростых групп Ли на многообразиях вида $M \times \boldsymbol{R}$, где M—однородное пространство компактной группы Ли. Пусть K—максимальная компактная подгруппа полупростой линейной группы Ли G, L—связная замкнутая подгруппа в K. В работе ([3]) подгруппа L называется G-подгруппой в K, если естественное действие группы K на K/L продолжается до действия группы G, т. е. имеем $K/L = G/U$. В ([3]) явно перечислены подалгебры $l \subset k$, соответствующие G-подгруппам $L \subset K$ (они называются g-подалгебры). Аналогичный результат в нашем случае формулируется следующим образом.

Теорема 3. *Пусть L_1—связная компактная подгруппа в K. Для того чтобы на многообразии $K/L_1 \times \boldsymbol{R}$ существовало транзитивное действие группы G, индуцирующее структуру однородного K-расслоения с базой K/L_1 и слоем $\boldsymbol{R}$, необходимо и достаточно, чтобы подалгебра $l_1 \subset k$ содержалась в некоторой g-подалгебре*

$l \subseteq k$, причем либо $l_1 = l$, либо $l = so(n) \oplus \bar{l}$ и $l_1 = so(n-1) \oplus \bar{l}$, где $n \geqslant 2$ и $so(n)$ максимальная компактная подалгебра в идеале типа $so(1, n)$ редуктивной части подалгебры $u \subseteq g$, отвечающей l.

Автор искренне благодарен А. Л. Онищику за внимание к работе.

Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

Հ. Մ. ԽՈՍՐՈՎՅԱՆ

Քվազիճավասարաչափ ենթախմբերը կիսապարզ Լիի խմբերում

Հոդվածում նկարագրված են G իրական կիսապարզ գծային Լիի խմբի քվազիհավասարաչափ U ենթախմբերը, այսինքն G Լիի խմբի բոլոր կապակցված փակ U ենթախմբերը, որոնց դեպքում G/U համասեռ տարածությունները հոմեոմորֆ են $M \times R$-ին, որտեղ M-ը կոմպակտ բազմաձևություն է։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Д. Н. Ахиезер*, Изв. АН СССР. Сер. мат., т. 41, 308—324 (1977). [2] *О. М. Хосровян*, в сб.: Геометрические методы в задачах анализа и алгебры, Ярославль, 1978. [3] *А. Л. Онищик*, Мат. сб., 74 (116), 398—416 (1967). [4] *S. Helgason*, Differential geometry, Lie groupes and symmetric spaces, Academic press, N. Y, San Francisco, London, 1978. [5] *А. Л. Онищик*, Мат. сб., 71 (113), 483—494 (1966). [6] *А. Л. Онищик*, в сб.: Геометрические методы в задачах анализа и алгебры, Ярославль 1980.