ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXIV 1982 1

УДК 539.379

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. П. Журавлев, С. А. Назаров, Б. А. Шойхет

Асимптотика вблизи вершины трещины напряженно-деформированного состояния неоднородно стареющих тел

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 11/VI 1981)

1. Пусть Ω — плоская связная область с гладкой границей, содержащая разрез $\Gamma=\{\vec{x}|x_2=0,\ a\leqslant x_1\leqslant b\}$. Уравнения плоской деформации в декартовых координатах получаются из уравнений трехмерной задачи ([1]) подстановкой условий

$$u_i(t, x_1, x_2, x_3)=u_i(t, x_1, x_2),\quad i=1, 2,\quad u_3=0;$$

$$\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ij}(\vec{u})\equiv(u_{i,j}+u_{j,i})/2,\quad i,\ j=1, 2; \tag{1.1}$$

$$\sigma_{ij,j}(t, \vec{x})+f_i(t, \vec{x})=0,\quad i=1, 2,\quad \text{при}\quad \vec{x}\in\Omega\setminus\Gamma; \tag{1.2}$$

$$\frac{s_{ij}(t, \vec{x})}{2G(t+\varkappa(\vec{x}), \vec{x})}=e_{ij}(t, \vec{x})-\int\limits_0^t R_1(t+\varkappa(\vec{x}), \tau+\varkappa(\vec{x}), \vec{x})e_{ij}(\tau, \vec{x})d\tau,\ i, j=1, 2;$$

$$\frac{\sigma(t, \vec{x})}{E_*(t+\varkappa(\vec{x}), \vec{x})}=e(t, \vec{x})-\int\limits_0^t R_2(t+\varkappa(\vec{x}), \tau+\varkappa(\vec{x}), \vec{x})\,e(\tau, \vec{x})d\tau; \tag{1.3}$$

$$e=(e_{11}+e_{22})/3,\quad \varepsilon_{ij}=\delta_{ij}e+e_{ij},\quad \sigma_{ij}=\delta_{ij}\sigma+s_{ij},\ i, j=1, 2; \tag{1.4}$$

$$u_i=0,\ i=1, 2,\ \text{при}\ \vec{x}\in S_u,\ \sigma_{ij}n_j=P_i(t, \vec{x})\ \text{при}\ \vec{x}\in S_p,\ S_u\cup S_p=\partial\Omega; \tag{1.5}$$

$$\sigma_{12}=g_1^{\pm}(t, \vec{x}),\quad \sigma_{22}=g_2^{\pm}(t, \vec{x})\quad \text{при}\quad \vec{x}\in\Gamma^{\pm}. \tag{1.6}$$

Здесь u_i, σ_{ij}, ε_{ij} — декартовы компоненты перемещений, напряжений и деформаций соответственно; s_{ij}, e_{ij} — компоненты девиаторов напряжений и деформаций; σ, e — их шаровые части: $E_*(t, \vec{x})$, $R_2(t, \tau, \vec{x})$ — модуль объемного расширения и ядро релаксации при всестороннем растяжении (сжатии); $G(t, \vec{x})$, $R_1(t, \tau, \vec{x})$ — модуль сдвига и ядро релаксации при сдвиге; $\varkappa(\vec{x})$ — функция неоднородного старения, характеризующая закон изменения возраста материала; f_i, P_i, $g_i^{\pm}$ — объемные и поверхностные нагрузки.

2. Решение будем рассматривать на произвольном отрезке времени $[0, T]$. Сформулируем ограничения, при которых существует решение задачи ползучести. Пусть при $\forall t$ нагрузки f_i, P_i, $g_i^{\pm}$ суммируемы с квадратом и кусочно-непрерывны* по t как отображения от-

* Т. е. допускается мгновенное изменение нагрузки в отдельные моменты времени

резка $[0, T]$ в пространстве L_2, модули E_*, G непрерывны по t, кусочно-непрерывны по $\vec{x}$ и удовлетворяют оценкам

$$E_1 \leqslant E_* \leqslant E_2, \; G_1 \leqslant G \leqslant G_2, \quad E_1, \; E_2, \; G_1, \; G_2 = \text{const} > 0,$$

ядра релаксации R_i представимы в виде

$$R_i(t, \tau, \vec{x}) = p_i(t, \tau, \vec{x})(t-\tau)^{-\alpha} + q_i(t, \tau, \vec{x}), \quad i=1, 2, \; \alpha<1,$$

где p_i, q_i ограничены, непрерывны по t, τ, кусочно-непрерывны по $\vec{x}$, функция $\varkappa(\vec{x})$ ограничена и кусочно-непрерывна. Известно ([2]), что при этих ограничениях существует единственное обобщенное решение задачи (1.1)—(1.6). Из хода доказательства этого утверждения в ([2]) и известных результатов ([3]) о гладкости решения эллиптических систем следует локальная гладкость решения задачи ползучести по координатам $\vec{x}$ в подобластях регулярности правой части и реологических характеристик.

3. Для определенности решение будет изучаться в окрестности U правой вершины трещины $\vec{x}_в$. Предполагается, что функции E_*, G, p_i, q_i, f_i—гладкие по совокупности аргументов t, τ, $\vec{x}$ при t, $\tau \in [0, T]$, $\vec{x} \in U$, функция $\varkappa$—гладкая при $\vec{x} \in U$, функции $g_i^{\pm}$—гладкие по $\vec{x}$ при $t \in [0, T]$, $\vec{x} \in U \cap \Gamma^{\pm}$, причем

$$g(t, \vec{x}_в) \equiv g_i^+(t, \vec{x}_в) = g_i^-(t, \vec{x}_в), \quad i=1, 2, \quad t \in [0, T].$$

Под гладкостью здесь понимается наличие достаточного числа непрерывных производных, причем предполагается, что производные функций f_i, $g_i^{\pm}$ по пространственным координатам кусочно-непрерывны по t как отображения отрезка $[0, T]$ в пространство непрерывных функций. Тогда решение—гладкое в области $U \setminus D_d$, где D_d—круг радиуса d с центром в $\vec{x}_в$, d—произвольно. Выберем d так, чтобы $D_{2d} \in U$, и введем срезающую гладкую функцию $\varkappa(\vec{x})$ так, чтобы $\varkappa=1$ при $\vec{x} \in D_{d/2}$, $\varkappa=0$ при $\vec{x} \notin D_d$. Пусть (r, θ) — полярные координаты с началом в $\vec{x}_в$ и полярной осью, направленной по отрезку Γ так, что на $\Gamma^{\pm}$ имеют место равенства $\theta=0$, $\theta=2\pi$ соответственно.

Введем обозначения для „замороженных" в вершине $\vec{x}_в$ трещины реологических характеристик:

$$G^0(t) \equiv G(t+\varkappa(\vec{x})_в, \vec{x}_в), \quad E_*^0(t) \equiv E_*(t+\varkappa(\vec{x}_в), \vec{x}_в);$$

$$\nu \equiv (E_*-2G)/(2G+2E_*), \quad k=3-4\nu;$$

$$\nu^0(t) \equiv \nu(t+\varkappa(\vec{x}_в), \vec{x}_в), \quad k^0(t) \equiv k(t+\varkappa(\vec{x}_в), \vec{x}_в);$$

$$R_i^0(t, \tau) \equiv R_i(t+\varkappa(\vec{x}_в), \tau+\varkappa(\vec{x}_в), \vec{x}_в), \quad i=1, 2.$$

Теорема 1. *При сделанных предположениях справедливы асимптотические представления решения задачи ползучести:*

$$\vec{u}(t,r,\theta)=\begin{bmatrix}u_2(t,r,\theta)\\u_\theta(t,r,\theta)\end{bmatrix}=r^{1/2}[C_1(t)\vec{\psi}^1(t,\theta)+C_2(t)\vec{\psi}^2(t,\theta)+A_1(t)\vec{\xi}^1(\theta)+$$

$$+A_2(t)\vec{\xi}^2(\theta)]\varkappa(r,\theta)+\vec{0}(r);$$

$$\vec{\psi}^1(t,\theta)=\begin{vmatrix}\psi_2^1(t,\theta)\\\psi_\theta^1(t,\theta)\end{vmatrix}\equiv\begin{vmatrix}(2k^0(t)-1)\sin\theta/2+\sin 3\theta/2\\(2k^0(t)+1)\cos\theta/2+\cos 3\theta/2\end{vmatrix}; \tag{3.1}$$

$$\vec{\psi}^2(t,\theta)=\begin{vmatrix}\psi_2^2(t,\theta)\\\psi_\theta^2(t,\theta)\end{vmatrix}\equiv\begin{vmatrix}(2k^0(t)-1)\cos\theta/2+3\cos 3\theta/2\\-(2k^0(t)+1)\sin\theta/2-3\sin 3\theta/2\end{vmatrix};$$

$$\vec{\xi}^1(\theta)=\begin{vmatrix}\xi_2^1(\theta)\\\xi_\theta^1(\theta)\end{vmatrix}\equiv\begin{vmatrix}\sin\theta/2\\\cos\theta/2\end{vmatrix},\qquad \vec{\xi}^2(\theta)=\begin{vmatrix}\xi_2^2(\theta)\\\xi_\theta^2(\theta)\end{vmatrix}\equiv\begin{vmatrix}\cos\theta/2\\-\sin\theta/2\end{vmatrix};$$

$$\sigma_{rr}(t,r,\theta)=2G^0(t)r^{-1/2}\left|B_1(t)\left(\frac{5}{2}\sin\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+B_2(t)\left(\frac{5}{2}\cos\frac{\theta}{2}+\frac{3}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right)\right|\chi(r,\theta)+0(1);$$

$$\sigma_{\theta\theta}(t,r,\theta)=2G^0(t)r^{-1/2}\left|B_1(t)\left(\frac{3}{2}\sin\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+B_2(t)\left(\frac{3}{2}\cos\frac{\theta}{2}-\frac{3}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right)\right|\chi(r,\theta)+0(1); \tag{3.2}$$

$$\sigma_{r\theta}(t,r,\theta)=2G^0(t)r^{-1/2}\left|B_1(t)\left(-\cos\frac{\theta}{2}+\cos\frac{3\theta}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+B_2(t)\left(\sin\frac{\theta}{2}-3\sin\frac{3\theta}{2}\right)\right|\chi(r,\theta)+0(1).$$

В (3.1) коэффициенты $A_i(t)$ определяются через $C_i(t)$ из решения интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$A_i(t)+\frac{2(1+\nu^0(t))}{3}\int_0^t Z(t,\tau)A_i(\tau)d\tau-\int_0^t R_i^0(t,\tau)A_i(\tau)d\tau+$$

$$+\frac{8(1+\nu^0(t))}{3}\int_0^t Z(t,\tau)(1-2\nu^0(\tau))C_i(\tau)d\tau-8\int_0^t R_i^0(t,\tau)(\nu^0(t)-\nu^0(\tau))C_i(\tau)d\tau=0,$$

$$i=1,\ 2,\quad Z(t,\tau)\equiv R_1^0(t,\tau)-R_2^0(t,\tau). \tag{3.3}$$

В (3.2) коэффициенты $B_i(t)$ выражаются через $C_i(t)$ формулами

$$B_i(t)=C_i(t)-\int_0^t R_i^0(t,\tau)C_i(\tau)d\tau,\quad i=1,\ 2.$$

Формулы (3.1) допускают почленное дифференцирование.

Замечание 1. Асимптотические представления напряжений (3.2) совпадают с соответствующими представлениями упругой задачи ([4,5]).

Замечание 2. Если ядра объемной и сдвиговой релаксации совпадают в вершине трещины и коэффициент Пуассона $\nu^0 = \mathrm{const}$, то из (3.3) следует

$$A_i = 0, \quad i = 1, 2,$$

и представления (3.1) совпадают с соответствующими представлениями упругой задачи. В случае однородной области этот результат прямо следует из теорем Н. Х. Арутюняна [6–8].

Замечание 3. Доказательство существенно опирается на результаты [9,10] для общих эллиптических систем в областях с коническими (угловыми) точками.

Ленинградский государственный
университет им. А. А. Чкалова
ВНИИТ им. Б. И. Веденеева

Վ. Պ. ԺՈՒՐԱՎԼՅՈՎ, Ս. Ա. ՆԱԶԱՐՈՎ, Բ. Ա. ՇՈՅԽԵՏ

Անհամասեռ ծերացող մարմինների լարված-դեֆորմացված վիճակի ճաքի գագաթի շրջակայքի ասիմպտոտիկան

Ուսումնասիրվում է ճաք ունեցող անհամասեռ ծերացող մարմինների համար սողքի տեսության խնդրի լուծման ճաքի գագաթի շրջակայքի ասիմպտոտիկան։

Ստացվել են լարումների և տեղափոխությունների ասիմպտոտական ներկայացումները։ Պարզվում է, որ լարումների համար այդ ներկայացումները ունեն նույն տեսքը, ինչպիսին ստացվում է դասական առաձգականության տեսություններում, իսկ տեղափոխությունների համար ներկայացումները տարբերվում են լրացուցիչ գումարներով։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. Х. Арутюнян*, ДАН СССР, т. 229, № 3 (1976). [2] *Н. Х. Арутюнян, Б. А. Шойхет*, Изв. АН СССР, МТТ, № 3 1981. [3] *S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg*, Comm. pure Appl. Math, vol. 17 (1964). *Л. И. Седов*, Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, Наука, М., 1980 [5] *M. L. Williams*, J. Appl. Math., vol. 19, № 4 (1952). [6] *Н. Х. Арутюнян*, ДАН АрмССР, т. 7, № 5 (1947). [7] *В. Д. Харлаб*, Изв. ВНИИГ, т. 68, (1961). [8] *Л. П. Трапезников, Б. А. Шойхет*, Изв. ВНИИГ, т. 109 (1975). [9] *В. А. Кондратьев*, Труды Моск. мат. о-ва, т. 16 (1967). [10] *В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский*, Math. Nachrichten, Bd. 76 (1977).