

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН Армянской ССР А. А. Талалян

Об ортогональных системах, не являющихся системами безусловной сходимости

(Представлено 4/IX 1981)

Ортогональные и нормированные в $L_2[0, 1]$ системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ для краткости будем называть О. Н. системами. Обозначим

$$\|f\| = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \quad \|f\|_E = \left(\int_E |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \quad E \subset [0, 1]. \quad (1)$$

Для удобства изложения приведем также некоторые определения.

Определение 1. О. Н. система $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ называется системой безусловной сходимости, если для любой перестановки $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ натуральных чисел и для любой последовательности $\{a_k\}$, $\sum a_k^2 < +\infty$, ряд

$$\sum a_k \varphi_{v_k}(x)$$

сходится почти всюду на $[0, 1]$.

Определение 2. Система $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ интегрируемых с квадратом на множестве E функций, называется полной на множестве E , если множество конечных линейных комбинаций функций $f_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$ всюду плотно в $L_2(E)$.

Определение 3. О. Н. система $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ называется полной по рядам из L_2 на множестве E , $E \subset [0, 1]$, $\mu(E) > 0$, если для любой функции $f(x)$, определенной на E и интегрируемой с квадратом на E , существует $F(x) \in L_2[0, 1]$ такая, что $F(x) = f(x)$ почти всюду на E и ряд Фурье функции $F(x)$ по системе $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к $F(x)$ в метрике $L_2[0, 1]$.

Определение 4. Система $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ почти везде конечных на $[0, 1]$ измеримых функций называется неполной всюду, если она не полна ни на одном множестве $E \subset [0, 1]$, $\mu(E) > 0$.

В обзорной статье ⁽¹⁾ американского математика Прайса, где анализируются вопросы полноты О. Н. систем на подмножествах отрезка $[0, 1]$, а также вопросы сходимости и безусловной сходимости ортогональных рядов, поставлен следующий вопрос (см. ⁽¹⁾, с. 608): является ли свойство неполноты всюду (см. опр. 4) необходимым и достаточным условием для того, чтобы О. Н. система $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ была системой безусловной сходимости?

Оказывается, что этот вопрос имеет отрицательный ответ как в смысле необходимости, так и в смысле достаточности вышеуказанного условия. Если же в этом вопросе обычную полноту заменить более сильным требованием полноты по рядам из L_2 , то в этом случае в смысле необходимости условия получится положительный ответ. В настоящей статье приводится краткая схема доказательства этих утверждений. Отрицательный ответ на первую часть вопроса фактически содержится в работе ⁽²⁾ (см. также ⁽³⁾, с. 119), где построена О. Н. система $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что

$$f_n(x) = b_n x^{n-1}, \quad x \in \left[\frac{1}{n+1}, 1 \right], \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

где b_n — отличные от нуля числа.

В самом деле, эта система по теореме Мюнца полна на любом отрезке $[\delta, 1]$, $0 < \delta < 1$, и вместе с тем $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ является системой безусловной сходимости, ибо, как легко видеть, любой ряд $\sum a_n f_n(x)$, где $\sum a_n^2 < +\infty$, абсолютно сходится во всех точках интервала $(0, 1)$. Иначе обстоит дело, когда О. Н. система $\{\varphi_n(x)\}$ полна по рядам из L_2 на множестве E , $E \subset [0, 1]$ положительной меры. Верна следующая

Теорема 1. Если О. Н. система $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ полна по рядам из L_2 на некотором множестве $E \subset [0, 1]$, $\mu(E) > 0$, то существуют перестановка $\{\nu_k\}_{k=1}^{\infty}$ натуральных чисел и последовательность $\{a_k\}$, $\sum a_k^2 < +\infty$, такие, что ряд $\sum a_k \varphi_{\nu_k}(x)$ расходится почти всюду на множестве E .

Эта теорема является обобщением известной теоремы Ульянова ⁽⁴⁾ и Олевского ⁽⁵⁾, согласно которой для любой полной в $L_2[0, 1]$ О. Н. системы существует расходящийся почти всюду на $[0, 1]$ ряд $\sum a_k \varphi_{\nu_k}(x)$, где $\sum a_k^2 < +\infty$, $\{\nu_k\}_{k=1}^{\infty}$ — некоторая перестановка натуральных чисел.

Теорема 1 означает также, что явление расходимости почти всюду переставленных рядов по полным О. Н. системам имеет локальный характер — для неполных систем это явление сохраняется на тех множествах, где они полны по рядам из L_2 .

Для доказательства теоремы 1 в пространстве $L_2(E)$, где E множество, на котором система $\{\varphi_n(x)\}$ полна по рядам из L_2 , вводится новая норма $\|\cdot\|^*$ следующим образом.

Для $f(x) \in L_2(E)$ обозначается через M_f множество функций $F(x) \in L_2[0, 1]$, являющихся суммами в $L_2[0, 1]$ рядов по системе $\{\varphi_n(x)\}$ и совпадающих с $f(x)$ почти всюду на E . Полагается

$$\|f\|^* = \inf_{F \in M_f} \|F\|. \quad (4)$$

Множество $L_2(E)$ с нормой $\|\cdot\|^*$ является полным нормированным пространством и оператор $Af = f$, отображающий это пространство на пространство $L_2(E)$ с нормой $\|f\|_E$, $f \in L_2(E)$, непрерывен. Отсюда применением теоремы Банаха о непрерывности обратного оператора получается существование постоянной величины $M > 0$, такой, что для любой $f(x) \in L_2(E)$ существует ряд $\sum a_k \varphi_{\nu_k}(x)$, $\sum a_k^2 < +\infty$,

сумма которого (в метрике $L_2[0, 1]$) совпадает с $f(x)$ почти всюду на E и

$$\left\| \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x) \right\| \leq M \|f\|_E, \quad n=1, 2, \dots \quad (5)$$

Этот факт играет вспомогательную роль при установлении следующей основной леммы.

Лемма 1. Пусть О. Н. система $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ полна по рядам из L_2 на E , $E \subset [0, 1]$, $\mu(E) > 0$, и $A \subset E$, $\mu(A) > 0$. Тогда для любого натурального N и положительного $\eta > 0$ существуют $a_{N+1}, a_{N+2}, \dots, a_m$; $m > N$ и функция $r(A, x)$ такие, что

$$r(A, x) = 1, \quad x \in A_1; \quad r(A, x) = -1, \quad x \in A_2; \quad r(A, x) = 0, \quad x \notin A, \quad (6)$$

где

$$A_1 \cup A_2 = A, \quad \mu(A_1) = \mu(A_2) = 1/2 \mu(A); \quad (7)$$

$$\left\| \sum_{i=N+1}^m a_i \varphi_i(x) - r(A, x) \right\|_E \leq \eta; \quad (8)$$

$$\left\| \sum_{i=N+1}^n a_i \varphi_i(x) \right\| \leq M \|r(A, x)\|_E = M \cdot \|r(A, x)\|_A, \quad (9)$$

где M — постоянная, зависящая только от $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ и от E .

Эта лемма дает возможность свести доказательство теоремы 1 к результату Ульянова ⁽⁴⁾ о существовании рядов из L_2 по системе Хаара, расходящихся почти всюду на $[0, 1]$ после перестановок. Заметим, что этот результат Ульянова лежит также в основе доказательства вышеупомянутой теоремы Ульянова—Олевского. Сама лемма 1 доказывается методом, приведенным в работе ⁽⁶⁾ (см. ⁽⁶⁾, леммы 1.3 и 3.3), который существенно отличается от методов, применяемых в подобных вопросах в случае полных в $L_2[0, 1]$ ортонормированных систем.

Теперь приведем простой и наглядный пример О. Н. системы, дающей отрицательный ответ на вторую часть вышеприведенной задачи Прайса.

Пусть $\{r_n(x)\}_{n=1}^\infty$ — система Радемахера, т. е. $r_n(x) = \text{sign} \sin 2^n \pi x$, $n=1, 2, \dots$ и $\{n_k\}$ — последовательность натуральных чисел такая, что

$$n_k > n_{k-1} + 2, \quad k \geq 2, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (n_k - n_{k-1}) = +\infty \quad (10)$$

и если обозначить

$$m_k = n_{k+1} - n_k, \quad k \geq 1, \quad N_1 = 1, \quad N_j = j + \sum_{k=1}^{j-1} m_k, \quad j \geq 2, \quad (11)$$

то

$$\sum_{n=0}^{m_j} \frac{1}{N_j + n} > 1. \quad (12)$$

Для каждого фиксированного k по аналогии с функциями Хаара

определим функции $\{\chi_{ki}^{(n)}(x)\}$, $1 \leq i \leq 2^n$, $0 \leq n \leq m_k$ следующим образом:
 $\chi_{k1}^{(0)}(x) = r_{n_k}(x)$,

$$\chi_{k1}^{(1)}(x) = \sqrt{2} r_{n_k-1}(x) \chi_{E_{k1}^{(1)}}(x), \quad \chi_{k2}^{(1)}(x) = \sqrt{2} r_{n_k+1}(x) \chi_{E_{k2}^{(1)}}(x), \quad (13)$$

где $\chi_{E_{k1}^{(1)}}(x)$ и $\chi_{E_{k2}^{(1)}}(x)$ — характеристические функции множеств $E_{k1}^{(1)} = \{x; \chi_{k1}^{(0)}(x) > 0\}$, $E_{k2}^{(1)} = \{x; \chi_{k1}^{(0)}(x) < 0\}$. Далее, если определены функции $\chi_{ki}^{(n-1)}(x)$, $1 \leq i \leq 2^{n-1}$, обозначаем

$$E_{k2i-1}^{(n)} = \{x; \chi_{ki}^{(n-1)}(x) > 0\}, \quad E_{k2i}^{(n)} = \{x; \chi_{ki}^{(n-1)}(x) < 0\} \quad (14)$$

и полагаем

$$\chi_{k2i-1}^{(n)}(x) = \sqrt{2^n} r_{n_k+n}(x) \chi_{E_{k2i-1}^{(n)}}(x); \quad \chi_{k2i}^{(n)}(x) = \sqrt{2^n} r_{n_k+n}(x) \chi_{E_{k2i}^{(n)}}(x). \quad (15)$$

Полученная система $\{\chi_{ki}^{(n)}(x)\}$, $1 \leq i \leq 2^n$, $0 \leq n \leq m_k$, $k = 1, 2, \dots$ ортогональна, нормирована и обладает следующими свойствами:

а) В сумме

$$\sum_{n=0}^{m_k} \sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{N_k+n} \frac{1}{\sqrt{2^n}} \chi_{ki}^{(n)}(x) \quad (16)$$

слагаемые можно переставлять таким образом, чтобы для вновь полученной суммы

$$\sum_{r=0}^{2^{m_k+1}-1} a_r f_r^{(k)}(x) \quad (17)$$

почти всюду на $[0, 1]$ имело место неравенство

$$\sup_{1 \leq p \leq q < 2^{m_k+1}} \left| \sum_{r=p}^q a_r f_r^{(k)}(x) \right| \geq \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{m_k} \sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{N_k+n} \frac{1}{\sqrt{2^n}} |\chi_{ki}^{(n)}(x)| > \frac{1}{2}. \quad (18)$$

б) Если Δ — двоичный интервал, т. е. $\Delta = (j-1/2^N, j/2^N)$, и натуральное p выбрано так, что $n_p > N+2$, то любая линейная комбинация $H(x)$ вида

$$H(x) = \sum_{k=p}^q \sum_{n=0}^{m_k} \sum_{i=1}^{2^n} c_{ki}^{(n)} \chi_{ki}^{(n)}(x), \quad q \geq p \quad (19)$$

обладает тем свойством, что для любого c

$$\mu(\{x; |H(x)| > c\} \cap \Delta') = \mu(\{x; |H(x)| > c\} \cap \Delta''), \quad (20)$$

где Δ' , Δ'' соответственно левая и правая половины интервала Δ .

Из свойства а), которое является следствием известной леммы Никишина—Ульянова (?), вытекает, что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{m_k} \sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{N_k+n} \frac{1}{\sqrt{2^n}} \chi_{ki}^{(n)}(x), \quad (21)$$

который является рядом из L_2 , после некоторой перестановки членов расходится почти всюду на $[0, 1]$. Таким образом, построенная О. Н. система не является системой безусловной сходимости. Вместе с тем, построенная система неполна всюду. Это легко доказать, основываясь

на свойстве β) (выполнение этого свойства легко усматривается из построения системы), и из следующей теоремы, доказанной в работе ⁽²⁾ (см. также ⁽³⁾, с. 116, теорема 12).

Теорема 2. Если система $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ почти везде конечных на множестве E измеримых функций обладает тем свойством, что любая, определенная на E измеримая функция является пределом в смысле сходимости по мере на E некоторой последовательности конечных линейных комбинаций функций $f_n(x)$, $n=1, 2, \dots$; то для любого натурального N этим же свойством обладает и подсистема $\{f_n(x)\}_{n=N+1}^{\infty}$.

Предполагая, что система $\{\chi_{ki}^{(n)}(x)\}$ полна на некотором множестве E , $\mu(E) > 0$, в метрике $L_2(E)$ берется двонный интервал $\Delta = (j-1/2^N, j/2^N)$, для которого

$$\mu(E \cap \Delta') > \frac{7}{8} \mu(\Delta'), \quad \mu(E \cap \Delta'') > \frac{7}{8} \mu(\Delta''), \quad (22)$$

где Δ' , Δ'' левая и правая половины интервала Δ .

Можно доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \cap \Delta' \\ 0, & x \in E \cap \Delta'' \end{cases}$$

не является пределом в смысле сходимости по мере на множестве $E \cap \Delta$ никакой последовательности линейных комбинаций подсистемы $\{\chi_{ki}^{(n)}(x)\}$, $1 \leq i \leq 2^n$, $0 \leq n \leq m_k$, $k=p, p+1, \dots$; где p такое, что $n_p > N+2$. Это противоречит теореме 2 и, следовательно, система будучи неполной на $\Delta \cap E$ в смысле сходимости по мере не будет полной в метрике $L_2(E \cap \Delta)$.

В заключение сделаем два замечания.

Замечание 1. Так как построенная система содержит ограниченную подсистему сходимости $\{r_{nk}(x)\}_{k=1}^{\infty}$, то путем преобразований матрицами, рассмотренными А. М. Олевским (см. ⁽⁸⁾, с. 97 и ⁽⁹⁾), из нее можно получить различные не полные всюду, ограниченные О. Н. системы, которые вместе с тем не являются системами безусловной сходимости.

Замечание 2. Если О. Н. система $\{\varphi_n(x)\}$ полна по рядам из L_2 на некотором множестве $E \subset [0, 1]$, $\mu(E) > 0$, то, как нетрудно убедиться, отрезок $[0, 1]$ разбивается на два непересекающиеся множества A и B таких, что система $\{\varphi_n(x)\}$ не полна по рядам из L_2 ни на одном подмножестве множества B , а множество A представляется как объединение счетного числа попарно непересекающихся множеств A_k , на каждом из которых $\{\varphi_n(x)\}$ полна по рядам из L_2 .

При помощи теоремы 1 нетрудно доказать существование ряда $\sum a_k \varphi_k(x)$, $\sum a_k^2 < +\infty$, который после некоторой перестановки членов расходится почти всюду на множестве A .

Ոչ պայմանական զուգամիտության համակարգեր չհանդիսացող օրթոգոնալ համակարգերի մասին

Հոդվածում հետազոտված է օրթոգոնալ սիստեմների դրական չափի բազմությունների վրա տարբեր իմաստներով լրիվության հատկությունների կապը այդ սիստեմներով վերլուծությունների ոչ պայմանական համարյա ամենուրեք զուգամիտության հետ:

Ապացուցված է ամենուրեք ոչ լրիվ այնպիսի օրթոգոնալ սիստեմների գոյությունը, որոնք չեն հանդիսանում ոչ պայմանական զուգամիտության սիստեմներ: Ապացուցված է նաև, որ որևէ դրական չափի բազմության վրա 1-ի շարքերով լրիվ օրթոգոնալ սիստեմը տեղափոխությունից հետո դառնում է տարամիտության համակարգ:

Ստացված արդյունքները հանդիսանում են Ժ. Պրայսի կողմից⁽¹⁾ աշխարհային հոդվածում դրված խնդրի լրիվ լուծումը⁽¹⁾, էջ 608):

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ I. I. Price, Amer. Math. Month., vol. 82, № 6 (1975). ² А. А. Талалаян, Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, т. 10, № 3 (1957). ³ А. А. Талалаян, УМН, т. 15, вып. 5 (95), (1960). ⁴ П. Л. Ульянов, УМН, т. 16, № 3 (1961). ⁵ А. М. Олевский, ДАН СССР, т. 138 (1961). ⁶ А. А. Талалаян, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 3 № 4—5 (1968). ⁷ Е. М. Никитин, П. Л. Ульянов, УМН, т. 22, № 3 (1967). ⁸ А. М. Olevskii, Fourier series with respect to general orthogonal systems, Springer—Verlag, Berlin Heidelberg, New York, 1975. ⁹ А. А. Талалаян, Известия АН Арм. ССР, Математика, т. 10, № 3 (1975).

