ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXIV 1982 1

УДК 518.9

МАТЕМАТИКА

А. А. Аракелян

D- произведение и композиция игр Ним

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 16/VI 1981)

Композиции игр Ним рассмотрены в ([1]), где при помощи введения функции Гранди получены условия, которым должны удовлетворять позиции, обеспечивающие игроку выигрыш или ничью. Однако функция Гранди не позволяет получить множество выигрышных позиций игры-композиции при помощи множеств выигрышных позиций игр сомножителей.

В данной статье, используя результаты работы ([2]), в которой построены решения композиции и D-произведения релятивов, приводятся множества позиций, обеспечивающих игрокам выигрыш или ничью для композиции и D-произведения игр Ним.

Опишем игру Ним, приведенную в ([1]), при помощи релятива (A, ρ). Пусть p и q игроки. Положения игроков будем представлять при помощи элементов поля A. Начальное состояние a_0 выбирается жеребьевкой. Далее противники поочередно выбирают элементы из A; вначале игрок p выбирает некоторый элемент $a_1 \in A$. Затем игрок q выбирает элемент $a_2 \in \rho\langle a_1 \rangle$, где $\rho\langle a_1 \rangle = \{a' \in A | (a_1, a') \in \rho\}$ называется ([2]) срезом отношения ρ через элемент a_1. Далее игрок p выбирает элемент $a_3 \in \rho\langle a_2 \rangle$ и т. д. Игра оканчивается, если один из игроков выбрал такой элемент a_k, что $\rho\langle a_k \rangle = \varnothing$, и выигравшим считается игрок, выбравший элемент из A последним.

Множество $V_\rho(A)$ называется решением релятива (A, ρ) ([2]), если оно удовлетворяет следующим условиям:

1) $(x, y) \notin \rho$ для любых $x, y \in V_\rho(A)$;

2) для любого $y \notin V_\rho(A)$ существует такой $x \in V_\rho(A)$, что $(x, y) \in \rho$.

Известно ([1]), что если релятив (A, ρ) имеет решение $V_\rho(A)$ и если один из игроков выбрал вершину в решении, то этот выбор обеспечивает ему выигрыш или ничью.

Релятив (A, ρ) называется композицией релятивов (A_i, ρ_i), $i \in I$, если $A = \prod\limits_{i \in I} A_i$, $(a, b) \in \rho$ тогда и только тогда, когда существует такой $i \in I$, что $(a_i, b_i) \in \rho_i$, $a_j = b_j$, $j \neq i$.

Определим следующее обобщение игры Ним ([1]). Пусть (A_i, ρ_i), $i \in I$ совокупность игр Ним и игра происходит следующим образом: в очередной момент игры игрок, которому нужно ходить, выбирает одну из игр Ним и делает ход в этой игре, не трогая остальных; первый, кто совсем не сможет играть, проигрывает. Определенная таким образом игра есть игра Ним для релятива, являющегося композицией релятивов (A_i, ρ_i), $i\in I$.

Из теоремы 1 главы 6 [1] следует, что если композиция (A, ρ) игр Ним (A_i, ρ_i), $i\in I$ имеет решение $V_\rho(A)$, то в такой игре выигрывает тот из игроков, который выберет элемент из $V_\rho(A)$. Однако в [1] не приводится вид множества $V_\rho(A)$.

Ниже мы покажем, что $V_\rho(A)$ можно построить при помощи решений $V_{\rho_i}(A_i)$ релятивов (A_i, ρ_i), $i\in I$.

Пусть $L\subset I$, $V_{\rho_i}(A_i)$ решение релятива (A_i, ρ_i), $i\in I$. Положим

$$W_L=\prod_{i\in L} V_{\rho_i}(A_i)\times \prod_{i\in I\setminus L}(A_i\setminus V_{\rho_i}(A_i)),\ I_{i_1,i_2,\ldots,i_k}=I\setminus\{i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_k\},$$

$$R^k=\{I_{i_1,i_2,\ldots,i_k}\}_{i_1,i_2,\ldots,i_k\in I},\ k\neq 0,\ R^0=I.$$

Всюду далее четность релятива будем понимать в смысле [3].

Игра Ним (A_i, ρ_i) четная, если релятив (A_i, ρ_i) четный.

Теорема 1. *Пусть $I=\{1, 2, \ldots, m\}$ и игры Ним (A_i, ρ_i) четные. Если игроки играют в композицию (A, ρ) этих игр, то выигрыш или ничья обеспечиваются выбором таких состояний $a\in A=\prod_{i\in I} A_i$, что $a\in V_\rho=\bigcup_{k=0}^{\left[\frac{|I|}{2}\right]}\ \bigcup_{L\in R^{|I|-2k}} W_L$, где $\left[\frac{|I|}{2}\right]$ целая часть от $\frac{|I|}{2}$.*

Доказательство следует из теоремы 3.1 [2] и теоремы 1 главы 6 [1].

Определим операцию суперпозиции бинарных отношений $\sigma_i\subset\subset A\times A$ следующим образом: $(a, b)\in\sigma_1\circ\sigma_2\circ\ldots\circ\sigma_n$ тогда и только тогда, когда существуют такие $c_i\in A_i$, $i=1, 2, \ldots, n-1$, что $(a, c_1)\in\sigma_1$, $(c_1, c_2)\in\sigma_2, \ldots, (c_{n-1}, b)\in\sigma_n$.

Если $\sigma_j=\rho$, $j=1, 2, \ldots, n$, то суперпозицию обозначим через $\overset{n}{\rho}$.

Для того чтобы $\rho\subset A\times A$ было ациклическим, нерефлексивным и асимметричным, ациклическим, нерефлексивным и симметричным, ациклическим, рефлексивным и асимметричным, необходимо и достаточно, чтобы имели место

$$\overset{n}{\rho}\cap\Delta_A=\varnothing \qquad \text{для любого } n$$

$$\overset{n}{\rho}\cap\Delta_A=\varnothing \qquad \text{для любого } n\neq 2,\ \Delta_A\subset\overset{2}{\rho},$$

$$\overset{n}{\rho}\cap\Delta_A=\varnothing \qquad \text{для любого } n>2,\ \Delta_A\subset\overset{2}{\rho}\cap\rho \text{ соответственно.}$$

Под звездой отношения $\rho\subset A\times A$ через элемент $a\in A$ будем понимать множество $(\rho\cup\overset{-1}{\rho})<a>$, где $\overset{-1}{\rho}<a>=\{a'\in A|(a', a)\in\rho\}$.

Отношение $\rho\subset A\times A$ называется звездно-конечным, если $|(\rho\cup\overset{-1}{\rho})<a>|<\infty$ для любого $a\in A$.

Пусть (A_i^0, ρ_i^0), $i\in I$ четные релятивы и элементы A_i, $i\in I$ перенумерованы не более, чем счетными кардинальными числами. Тогда из [3] будет следовать существование базиса $U_{\rho_i^0}(A_i^0)$ релятива (A_i^0, ρ_i^0), $i\in I$.

Положим $A_i^1 = A_i \setminus U_{\rho_i^0}(A_i^0)$, $\rho_i^1 = \rho_i^0 \cap (A_i^1 \times A_i^1)$, тогда по теореме Ричардсона ([3]) будет следовать существование базиса $U_{\rho_i^1}(A_i^1)$ релятива (A_i^1, ρ_i^1), $i \in I$. Если продолжить процесс построения релятивов по индукции, то получим последовательность релятивов $\{(A_i^k, \rho_i^k)\}_{k<\lambda}$, где $A_i^k = A_i \setminus \left(\bigcup_{l=1}^{k-1} U_{\rho_i^l}(A_i^l)\right)$, $\rho_i^k = \rho_i \cap A_i^k \times A_i^k$, $k \leqslant \lambda$ и для любого (A_i^k, ρ_i^k) существует базис $U_{\rho_i^k}(A_i^k)$, $k \leqslant \lambda$.

Аналогично, используя результаты ([3]), можно построить индуктивным способом релятивы (A_i^k, ρ_i^k) для звездно-конечного ациклического релятива (A_i, ρ_i), $i \in I$.

Пусть $(A_i^\alpha, \rho_i^\alpha)$ релятив, полученный из (A_i, ρ_i) описанным методом. Положим

$$Z_L^\alpha = (\prod_{i \in L} U_{\rho_i^\alpha}(A_i^\alpha)) \times (\prod_{i \in I \setminus L} (A_i^\alpha \setminus U_{\rho_i^\alpha}(A_i^\alpha)) \text{ где } L \subset I,\ V^\alpha = \bigcup_{k=0}^{\left[\frac{|I|}{2}\right]} \bigcup_{L \in R^{|I|-2k}} Z_L^\alpha.$$

Теорема 2. *Пусть игры Ним (A_i, ρ_i), $i \in I$*

а) *либо четные, либо ациклические и звездно-конечные,*

б) *существует такое порядковое число γ, что $A_i^\gamma = \varnothing$ и $A_i^\beta \neq \varnothing$ для любого $\beta < \gamma$, $i \in I$.*

Тогда, если игроки играют в композицию (A, ρ) этих игр, то выигрыш или ничья обеспечиваются выбором таких состояний $a \in A$, что $a \in V_\rho(A) = \bigcup_{\alpha < \gamma} V^\alpha$.

Доказательство следует из теоремы 3.2 ([2]) и теоремы главы 6 ([1]).

Положим для множества X множество $S(X) = \{Y | Y \subset X\}$.

Определение ([4]). Пусть I—некоторое множество. D называется фильтром над множеством I, если

а) $D \subset S(I)$, $\varnothing \neq D \neq S(I)$;

б) $X \in D$, $X \subset Y$ влекут $Y \in D$;

в) $X, Y \in D$ влекут $X \cap Y \in D$.

Пусть $I \neq \varnothing$, (A_i, ρ_i), $i \in I$ релятивы.

Положим $A = \prod_{i \in I} A_i$. Будем говорить, что $a_1 \in A$ эквивалентно $a_2 \in A$, $a_1 \sim a_2$, если $\{i \in I | a_1(i) = a_2(i)\} \in D$.

Положим $a^\sim = \{a_1 \in A | a \sim a_1\}$, $A^\sim = \{a^\sim | a \in A\}$.

Под D-произведением релятивов (A_i, ρ_i), $i \in I$ понимаем релятив $(A^\sim, \rho)$, определенный следующим образом: $(a_1^\sim, a_2^\sim) \in \rho$ тогда и только тогда, когда $\{i \in I | (a_1(i), a_2(i)) \in \rho_i\} \in D$.

Рассмотрим случай, когда $|a^\sim| = 1$ для любого $a \in A$.

Определим другое обобщение игры Ним. Пусть имеем некоторое множество игр Ним (A_i, ρ_i), $i \in I$, D—фильтр над I и игроки ходят поочередно по следующему правилу: в очередной момент игры игрок, которому нужно ходить, выбирает некоторое множество игр $T \in D$-фильтру и делает ход в играх (A_i, ρ_i), $i \in T$, не трогая остальных; первый, кто совсем не сможет играть, проигрывает. Эта ситуация представляет собой игру Ним на релятиве, который является D-произведением релятивов (A_i, ρ_i), $i \in I$.

Пусть $V_{\rho_i}(A_i)$ решение (A_i, ρ_i), $i \in I$. Положим

$$W_L = \Big(\prod_{i \in L} V_{\rho_i}(A_i)\Big) \times \Big(\prod_{i \in I \setminus L} (A_i \setminus V_{\rho_i}(A))\Big), \quad W_L^- = \{w^- \mid w \in W_L\}, \; L \subseteq I.$$

Способ выигрыша в определенной таким образом игре дается следующей теоремой.

Теорема 3. *Пусть* (A_i, ρ_i) *игра Ним, имеющая решение* $V_{\rho_i}(A_i)$, $i \in I$, *и существует такой* $L_1 \in D$*-фильтру над множеством* I, *что* $L_1 = \{i_j\}_{j=1,2,\ldots,l}$, $\{i_j\} \in D$, $j = 1, 2, \ldots, l$, $L(L_1) = \{L_k, \; k = 1, 2, \ldots, p \mid L_k \subset L_{k+1}, \; k = 1, 2, \ldots, p-1\}$.

Если игроки играют в D*-произведение* (A^-, ρ) *игр Ним* (A_i, ρ_i), $i \in I$, $|a^-| = 1$ *для любого* $a \in A$, *то выигрыш или ничья обеспечиваются выбором таких состояний* $a \in A$, *что* $a \in V_\rho(A^-) = \bigcup_{L \in L(L_1)} W_L^-$.

Доказательство следует из теоремы 2.1. ([2]) и теоремы 1 глава 6 ([1]).

Ереванский институт
народного хозяйства

Ա. Հ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ

Նիմ խաղերի D-արտադրյալը և կոմպոզիցիան

Հոդվածում դիտարկվում է Նիմ խաղերի D-արտադրյալի և կոմպոզիցիայի շահույթ կամ ոչ ոքի ապահովող իրավիճակների կառուցման խնդիրը։ Օգտագործելով [2] աշխատանքում ստացված արդյունքները, ապացուցվում է հետևյալ թեորեմը։

Թեորեմ։ Դիցուք (A_i, ρ_i) Նիմ խաղեր են, $V_{\rho_i}(A_i)$, $i \in I$ նրանց լուծումներն են և գոյություն ունի այնպիսի $L_1 \in D$-ֆիլտրին, որը տրված է I բազմության վրա, որ $L_1 = \{i_j\}_{j=1,2,\ldots,l}$, $\{i_j\} \in D$, $j = 1, 2, \ldots, l$,

$$L(L_1) = \{L_k, \; k = 1, 2, \ldots, p \mid L_k \subset L_{k+1}, \; k = 1, 2, \ldots, p-1\}.$$

Երբ խաղացողները խաղում են (A_i, ρ_i), $i \in I$ Նիմ խաղերի (A, ρ) D-արտադրյալը, $|a^-| = 1$ ցանկացած $a \in A$, ապա շահույթը կամ ոչ ոքին ապահովվում են այնպիսի իրավիճակներով, որ $a \in V_\rho(A^-) = \bigcup_{L \in L(L_1)} W_L^-$.

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *К. Берж*, Теория графов и ее применения, ИЛ, М., 1962. [2] *А. А. Аракелян*, в сб.: Мат вопросы кибернетики и вычислительной техники, вып. 12, ВЦ АН АрмССР, 1981. [3] *M. Richardson*, Ann. Math., vol. 58, N 3 (1953). [4] *Г. Дж. Крейслер, Чен Чень-Чунь*, Теория непрерывных моделей, Мир, М., 1971.