ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXIII 1981 5

УДК 539.55

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Академик АН Армянской ССР **Н. Х. Арутюнян, Б. А. Шойхет**

О наращивании вязкоупругого полого шара, подверженного старению

(Представлено 3/IV 1981)

Рассматривается полый шар, находящийся под действием переменного во времени внутреннего давления и непрерывно наращиваемый снаружи стареющим вязкоупругим материалом. Очевидно, что такое тело является неоднородно стареющим, так как процесс его наращивания происходит элементами материала различного возраста. Напряжения и деформации в неоднородно вязкоупругом растущем шаре выражаются через одну функцию времени, которая определяется из интегрального уравнения Вольтерра второго рода. Ядро и правая часть этого уравнения выражаются в замкнутой форме через упругие и реологические характеристики материала и закона движения внешней границы полого шара.

Задача наращивания с учетом ползучести рассматривалась в [1,2], а ее общая постановка для неоднородно стареющих вязкоупругих тел предложена в [3].

Пусть r—координата, отсчитываемая от центра шара, a_0—внутренний постоянный радиус, $a(t)$—внешний радиус, являющийся заданной функцией времени t. В момент $t=0$ имеет место $a(t)=a_0$.

Обозначим через $\varkappa(r)$ функцию, обратную $a(t)$, т. е. $\varkappa(r)$—момент времени, в который граница движущейся области достигает радиуса r.

Уравнения задачи имеют вид:

$$\alpha_r(r, t)=\frac{\partial v_r(r, t)}{\partial r}, \qquad \alpha_\theta(r, t)=\frac{v_r(r, t)}{r}, \quad a_0\leqslant r\leqslant a(t); \tag{1}$$

$$\varepsilon_r(r, t)=\int\limits_{\varkappa(r)}^{t}\alpha_r(r, \tau)d\tau, \quad \varepsilon_\theta(r, t)=\int\limits_{\varkappa(r)}^{t}\alpha_\theta(r, \tau)d\tau, \quad t\geqslant\varkappa(r); \tag{2}$$

$$\alpha_r(r, t)+2\alpha_\theta(r, t)=0, \qquad a_0\leqslant r\leqslant a(t); \tag{3}$$

$$r\frac{\partial\sigma_r(r, t)}{\partial r}+2(\sigma_r(r, t)-\sigma_\theta(rt))=0, \; a_0\leqslant r\leqslant a(t); \tag{4}$$

$$\sigma_r(r, t)=q(t) \quad \text{при } r=a_0, \quad \sigma_r(r, t)=0 \quad \text{при } r=a(t); \tag{5}$$

$$\sigma_\gamma(r, t) = S_\gamma(r, t) + P(r, t), \quad \gamma = r, \theta; \tag{6}$$

$$\frac{S_\gamma(r, t)}{2G(t-\varkappa(r))} = \varepsilon_\gamma(r, t) - \int\limits_{\varkappa(r)}^{t} R(t-\varkappa(r), \tau-\varkappa(r))\varepsilon_\gamma(r, \tau)d\tau, \ \gamma = r, \theta. \tag{7}$$

Здесь α_r, α_θ — скорости деформаций ε_r и ε_θ соответственно, v_r — скорость радиального перемещения, σ_r, σ_θ — компоненты напряжений, $q(t)$ — заданное внутреннее давление, S_r, S_θ — компоненты девиатора напряжений, P — шаровая часть тензора напряжений, $G(t)$ — упругомгновенный модуль сдвига, $R(t, \tau)$ — ядро релаксации стареющего материала. Отличные от нуля компоненты ε_φ, σ_φ деформаций и напряжений равны соответственно ε_θ, σ_θ.

Подставив выражения (1) в условия несжимаемости (3), получим $\partial v_r/\partial r + 2v_r/r = 0$, откуда

$$v_r(r, t) = c(t)/r^2, \quad \alpha_r(r, t) = -2c(t)/r^3, \quad \alpha_\theta(r, t) = c(t)/r^3 \tag{8}$$

где $c(t)$ — неизвестная функция.

Подставляя (8) в (2), получим

$$\varepsilon_r(r, t) = -2[F(t) - F(\varkappa(r))]/r_3, \quad \varepsilon_\theta(r, t) = [F(t) - F(\varkappa(r))]/r^3, \tag{9}$$

$$F(t) \equiv \int\limits_0^t c(\tau)d\tau.$$

Из закона ползучести (7) и выражений (9) следует

$$S_r(r, t) = \frac{-4G(t-\varkappa(r))}{r^3}\Big(F(t) - F(\varkappa(r)) - \int\limits_{\varkappa(r)}^{t} R(t-\varkappa(r), \tau-\varkappa(r))(F(\tau) - F(\varkappa(r))d\tau\Big); \tag{10}$$

$$S_r(r, t) = -2S_\theta(r, t).$$

Из (4) с учетом (6) и (10) получим

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} = -\frac{3S_r}{r}. \tag{11}$$

Интегрируя (11) по r в промежутке $[a_0, a(t)]$ и используя краевые условия (5), получим уравнение

$$\int\limits_{a_0}^{a(t)} \frac{3S_r(r, t)}{r}\,dr = q(t). \tag{12}$$

Подставим (10) в (12):

$$\int\limits_{a_0}^{a(t)} \frac{G(t-\varkappa(r))}{r^4}\Big(F(t) - F(\varkappa(r)) - \int\limits_{\varkappa(r)}^{t} R(t-\varkappa(r), \tau-\varkappa(r))(F(\tau) - F(\varkappa(r)))d\tau\Big)dr = -\frac{q(t)}{12}. \tag{13}$$

Сделаем в (13) замену переменной $\xi=\varkappa(r)$, тогда $r=a(\xi)$ и (13) преобразуется к виду

$$\int_0^t \frac{G(t-\xi)}{a^4(\xi)}\left(F(t)-F(\xi)-\int_\xi^t R(t-\xi,\ \tau-\xi)\,(F(\tau)-F(\xi))\,d\tau\right)a'(\xi)\,d\xi = -\frac{q(t)}{12}. \tag{14}$$

Изменив порядок интегрирования в левой части (14), получим разрешающее уравнение Вольтерра второго рода относительно функции $F(t)$

$$A(t)F(t)-\int_0^t Q(t,\ \xi)F(\xi)\,d\xi=-\frac{q(t)}{12}. \tag{15}$$

Здесь

$$A(t)\equiv\int_0^t f(t,\ \xi)\,d\xi,\quad f(t,\ \xi)\equiv\frac{G(t-\xi)a'(\xi)}{a^4(\xi)}, \tag{16}$$

$$Q(t,\ \xi)\equiv f(t,\ \xi)\left[1-\int_\xi^t R(t-\xi,\ \tau-\xi)\,d\tau\right]+\int_0^\xi R(t-\tau,\ \xi-\tau)\,f(t,\ \tau)\,d\tau.$$

Замечание. Так как $A(0)=0$, для существования ограниченного решения (15) необходимо, чтобы был конечен предел отношения $q(t)/A(t)$ при $t\to 0$. Механически это условие означает, что в начальный момент времени (когда полый шар имеет нулевую толщину) давление должно равняться нулю и скорость его нарастания должна быть согласована со скоростью роста толщины.

Институт механики Академии наук
Армянской ССР
Институт проблем механики АН СССР
Всесоюзный научно-исследовательский
институт гидротехники им.
Б. Е. Веденеева

Հայկական ՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս Ն. Խ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ, Բ. Ա. ՇՈՅԽԵՏ

Ծերացման ենթակա առաձգամածուցիկ սնամեջ գնդի մակաճեցման մասին

Դիտարկվում է սնամեջ գունդ, որը գտնվում է ժամանակից կախված ներքին ճնշման ազդեցության տակ և արտաքին կողմից անընդհատ մակաճեցվում է ծերացող առաձգամածուցիկ նյութով։ Ակնհայտ է, որ այդպիսի մարմինը հանդիսանում է անհամասեռ ծերացող, քանի որ նրա մակաճեցման ընթացքը կատարվում է տարբեր հասակ ունեցող նյութերի տարրերով։ Անհամասեռ առաձգամածուցիկ աճող գնդի լարումները և դեֆորմացիաները *արտահայտվում են ժամանակից կախված մի ֆունկցիայի միջոցով, որը որոշվում է Վոլտերայի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարումից։ Այդ ինտեգրալ հավասարման աջ մասը և կորիզը փակ ձևով արտահայտվում են նյութի ռեոլոգիական և առաձգական արտահայտիչներով և սնամեջ գնդի արտաքին սահմանի շարժման օրենքով։*

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. Д. Харлаб,* Тр. Ленинградского инж.-строит. ин-та, вып. 49 (1966). [2] *Д. И. Дятловицкий, А. И. Вайнберг,* Формирование напряжений в гравитационных плотинах, Наукова думка, Киев, 1975. [3] *Н. Х. Арутюнян,* ПММ, т. 41, № 5 (1977).