

УДК 51.01:517

МАТЕМАТИКА

С. М. Меликян

Две теоремы о классах псевдочисел

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 14/VII 1981)

В статье рассматриваются псевдочисла, т. е. конструктивные псевдосходящиеся последовательности рациональных чисел; исследуется классификация псевдочисел в соответствии со скоростью сходимости их приближений. Регуляторами сходимости псевдочисел являются всюду определенные предельно-рекурсивные функции — псевдопределы конструктивных последовательностей рекурсивных функций ^(1,2). Работа выполнена в рамках конструктивного направления в математике ^(3,4).

Основные понятия и определения. Мы будем использовать понятия и обозначения из ⁽⁴⁻⁷⁾. Через φ_i , W_i и q_k обозначим соответственно геделевские нумерации частично рекурсивных функций, рекурсивно-перечислимых множеств и рациональнозначных частично-рекурсивных функций. Для краткости изложения введем следующие обозначения: Π — множество псевдочисел, F — множество F -чисел ⁽⁵⁾, ОРФ — множество общерекурсивных функций, ПрРФ — множество всюду определенных предельно-рекурсивных функций. Если K — множество функций, то через $K \uparrow$ обозначим множество неубывающих функций из K , а через K^∞ обозначим множество неограниченных функций из $K \uparrow$.

Введем некоторые понятия и обозначения, относящиеся к псевдочислам и ПрРФ (ср. ⁽⁸⁾).

На множестве ПрРФ определим отношение мажорируемости ($\leq$) и строгой мажорируемости ($\leq$). Пусть $f \in \text{ПрРФ} \uparrow$ и $g \in \text{ПрРФ} \uparrow$, тогда отношения $\leq$ и $\leq$ определяются следующим образом:

$$g \leq f \Leftrightarrow \bigwedge t \bigwedge \exists x [x \geq t \Rightarrow g(x) \leq f(x)],$$

$$g \leq f \Leftrightarrow \forall x [g(x) \leq f(x)].$$

Если $p \in \Pi$, то через l_p обозначим минимальный регулятор сходимости относительно отношения строгой мажорируемости. Если f — двуместная общерекурсивная функция, то через $\hat{f}$ будем обозначать предельно-рекурсивную функцию, определенную на основе f ; точку

над f будем опускать в тех случаях, когда это не приводит к недоразумениям.

Пусть $f \in \text{ПрРФ}^\uparrow$. Определим множество псевдочисел R_f следующим образом: скажем, что $p \in R_f$ в том и только в том случае, когда существует бесконечное рекурсивно-перечислимое множество A такое, что выполняется следующее соотношение:

$$\forall x [x \in A \Rightarrow \forall yz [y, z \geq f(x) \Rightarrow |p(y) - p(z)| < 2^{-x}]]. \quad (1)$$

Нетрудно убедиться в том, что (1) эквивалентно следующему соотношению:

$$\forall x [x \in A \Rightarrow l_p(x) \leq f(x)].$$

Теорема 1. Существует неубывающая предельно-рекурсивная функция f , мажорирующая любую общерекурсивную функцию и такая, что $\bigcap (R_f = F)$.

Теорема 2. Для любых неубывающих предельно-рекурсивных функций g и h существует неубывающая предельно-рекурсивная функция f такая, что h не мажорирует f и $\bigcap (R_f = R_g)$.

Изложим основные конструкции, применяемые в доказательствах теорем 1 и 2. В дальнейшем используются двуместные общерекурсивные функции γ_i и θ_j со следующими свойствами:

- 1) $\forall i x [\lambda y [\gamma_i(x, y)] \in \text{ОРФ}^\uparrow];$
- 2) $\forall i [q_i \in \Pi \Rightarrow \gamma_i \in \text{ПрРФ}^\uparrow \& \gamma_i = l_{q_i}];$
- 3) $\forall i y [\lambda x [\theta_i(x, y)] \in \text{ОРФ}^\infty];$
- 4) $\forall j x [\lambda y [\theta_j(x, y)] \in \text{ОРФ}^\uparrow];$
- 5) $\forall i j [i < j \Rightarrow \forall x y [\theta_i(x, y) \leq \theta_j(x, y)]];$
- 6) $\forall j [\theta_j \in \text{ПрРФ}^\infty];$
- 7) $\forall i \bigcap \exists j [\varphi_j \in \text{ОРФ} \& \theta_i = \varphi_j];$
- 8) $\forall i [\varphi_i \in \text{ОРФ} \Rightarrow \varphi_i \leq \theta_i].$

Возможность построения таких функций легко устанавливается посредством применения обычных диагональных теоретико-алгоритмических конструкций.

Для двуместных функций f , построение которых проводится по шагам в процессе доказательств теорем 1 и 2, мы будем на каждом s -ом шаге процесса строить значения $f(x, s)$ при $x \leq s$ и подразумевать, что значения $f(s, y)$ при $y < s$ берутся равными $f(s, s)$.

Доказательство теоремы 1 проводится методом приоритета. Пусть s, x, i, j — натуральные числа. Через $\Delta_{x,i,j}^s$ обозначим следующее множество:

$$\Delta_{x,i,j}^s = \{y : \exists z [y \leq z \& \theta_i(z, s) \leq \theta_i(x, s)]\}.$$

Будем говорить, что x допустимо по j относительно конечного множества A на s -ом шаге, если

$$x \leq s \& j \leq s \& x \in W_{r(i)}^s \& \theta_j(x, s) < \gamma_{r(i)}(x, s);$$

$$\forall y [i < j \& i \notin A \& y \leq s \& y \in W_{r(i)}^s \cap \Delta_{x,i,j}^s \Rightarrow \gamma_{r(i)}(y, s) \leq \theta_i(y, s)].$$

Будем говорить, что i устойчиво в точке x на s -ом шаге, если

$$\forall y [y \leq x \Rightarrow [y \in W_{r(i)}^s \Rightarrow y \in W_{r(i)}^{s-1}] \& \theta_i(y, s-1) = \theta_i(y, s) \&$$

$$\& [\gamma_{r(i)}(y, s-1) \leq \theta_i(y, s-1) \Rightarrow \gamma_{r(i)}(y, s) \leq \theta_i(y, s)]].$$

Определим теперь функцию f по шагам.

Шаг 0. Положим $f(0, 0) = 0$ и $E_0 = \emptyset$.

Шаг $(s+1)$. На s -ом шаге уже построены E_s и $f(x, s)$ для $x \leq s$.

Этап I. Возможны два случая:

а) $E_s = \emptyset$. Положим $B = \emptyset$ и переходим к этапу II.

б) $E_s \neq \emptyset$. Пусть $E_s = \{(x_0, i_0), \dots, (x_n, i_n)\}$, где $x_m < x_{m+1}$ и $m = 0, \dots, (n-1)$.

Обозначим через A_e следующее множество:

$$A_e = \{(x_0, i_0), \dots, (x_e, i_e)\}, \text{ где } e \leq n.$$

Индуктивно определим свойство P множества A_e следующим образом: $P(A_0)$ имеет место в том и только в том случае, когда:

1) i_0 устойчиво в точке x_0 на $(s+1)$ -ом шаге,

2) x_0 допустимо по i_0 относительно множества $\emptyset$ на $(s+1)$ -ом шаге.

Далее, $P(A_{e+1})$ имеет место в том и только в том случае, когда:

1) $P(A_e)$;

2) i_{e+1} устойчиво в точке x_{e+1} на $(s+1)$ -ом шаге;

3) x_{e+1} допустимо по i_{e+1} относительно множества $\downarrow_1 A_e$ на $(s+1)$ -ом шаге.

В этом случае определим множество B следующим образом:

$$B = \begin{cases} \emptyset, & \text{если } \neg P(A_0); \\ A_e, & \text{если } P(A_0), \end{cases} \quad (2)$$

где $c = \max\{e : P(A_e)\}$, и переходим к этапу II.

Этап II. Обозначим через Q следующий предикат: $Q(x, j)$ имеет место в том и только в том случае, когда $j \notin \downarrow_1 B$ и x допустимо по j относительно множества $\downarrow_1 B$ на $(s+1)$ -ом шаге.

Возможны два случая.

а. Существуют x и j такие, что $Q(x, j)$.

Пусть $\bar{x} = \min\{x : \exists j Q(x, j)\}$, а $\bar{j}$ таково, что $Q(\bar{x}, \bar{j})$ (заметим, что $\exists j Q(\bar{x}, j)$). Полагаем

$$E_{s+1} = B \cup \{(\bar{x}, \bar{j})\}.$$

Если $B = \emptyset$, то положим $f(x, s+1) = \theta_j(\bar{x}, s+1)$, где $0 \leq x \leq s+1$; если $B \neq \emptyset$, то из (2) имеем $B = A_c$, тогда

$$f(x, s+1) = \begin{cases} f(x, s), & \text{если } 0 \leq x \leq x_c; \\ \theta_j(\bar{x}, s+1), & \text{если } x_c < x \leq s+1, \end{cases}$$

и переходим к шагу $(s+2)$.

б. Для любых x и j имеет место $\neg Q(x, j)$. Тогда полагаем $E_{s+1} = B$.

Если $B = \emptyset$, то положим $f(x, s+1) = 0$, где $0 \leq x \leq s+1$; если $B \neq \emptyset$, то из (2) имеем $B = A_c$; тогда положим

$$f(x, s+1) = \begin{cases} f(x, s), & \text{если } 0 \leq x \leq x_c; \\ f(x_c, s), & \text{если } x_c < x \leq s+1, \end{cases}$$

и переходим к шагу $(s+2)$.

Этим завершается построение функции f . На основании построения можно показать, что функция f — требуемая.

Доказательство теоремы 2 проводится методом приоритета, причем организация приоритета аналогична методу, применяемому в теореме 1. При доказательстве этой теоремы используются результаты из (9,10), а также следующая лемма:

Лемма. Существует неубывающая неограниченная предельно-рекурсивная функция g_0 такая, что для любой неубывающей предельно-рекурсивной функции g имеет место следующее утверждение:

$$\neg \neg (R_{g_1} = R_g), \quad \text{где } g_1 = \max\{g_0, g\}.$$

Изложим основную конструкцию доказательства теоремы 2.

Пусть $g \in \text{ПрРФ}^\dagger$ и $h \in \text{ПрРФ}^\dagger$, а g_0 — такая функция, что для нее выполнены условия леммы. Определим функции g_1, g_2, h_1 и d следующим образом:

$$g_1(x, y) = \max\{g_0(x, y), g(x, y)\};$$

$$g_2(x, y) = \max\{g_1(z, y) : z \leq x\};$$

$$h_1(x, y) = \max\{h(x, y), g_2(x, y)\};$$

$$d(x, s) = \max\{y : \exists z [y \leq z \leq s \& g_2(z, s) \leq h_1(x+1, s) + 1]\}.$$

Будем говорить, что x допустимо по j относительно конечного множества A на s -ом шаге, если

$$x \leq s \& j \leq s \& x \in W'_{r(j)}^s \& g_2(x, s) < \gamma_{r(j)}(x, s);$$

$$\forall i [i < j \& i \notin A \& y \leq d(x, s) \& y \in W'_{r(i)}^s \Rightarrow \gamma_{r(i)}(y, s) \leq g_2(y, s)].$$

Будем говорить, что i устойчиво в точке x на s -ом шаге, если

$$h_1(x+1, s+1) = h_1(x+1, s) \& d(x, s+1) = d(x, s);$$

$$\forall y [y \leq x \Rightarrow [y \in W'_{r(i)}^s \Rightarrow y \in W'_{r(i)}^{s+1}] \& g_2(y, s+1) = g_2(y, s) \&$$

$$\& [g_2(y, s+1) \geq \gamma_{r(i)}(y, s+1) \Rightarrow g_2(y, s) \geq \gamma_{r(i)}(y, s)]].$$

Определим функцию f по шагам.

Шаг 0. Положим $f(0, 0) = 0$ и $E_0 = \emptyset$.

Шаг $(s+1)$. На s -ом шаге построены E_s и $f(x, s)$ для $x \leq s$.

Этап I. Описание этого этапа полностью совпадает с описанием этапа I в доказательстве теоремы 1.

Этап II. Обозначим через Q следующий предикат: $Q(x, j)$ имеет место в том и только в том случае, когда $j \in \downarrow_1 B$ и x допустимо по j относительно множества $\downarrow_1 B$ на $(s+1)$ -ом шаге.

Возможны два случая.

а) Существуют x и j такие, что $Q(x, j)$.

Пусть $\bar{x} = \min\{x : \exists j Q(x, j)\}$, а j такое, что $Q(\bar{x}, j)$ (заметим, что $\nexists j Q(\bar{x}, j)$).

Положим $E_{s+1} = B \cup \{(\bar{x}, j)\}$.

Если $B = \emptyset$, то положим

$$f(x, s+1) = \begin{cases} g_2(\bar{x}, s+1), & \text{если } 0 \leq x \leq \bar{x} \\ h_1(\bar{x}+1, s+1)+1, & \text{если } \bar{x} < x \leq s+1. \end{cases}$$

Если $B \neq \emptyset$, то согласно (2) имеем $B = A_c$. В этом случае положим

$$f(x, s+1) = \begin{cases} f(x, s), & \text{если } 0 \leq x \leq d(x_c, s+1), \\ g_2(\bar{x}, s+1), & \text{если } d(x_c, s+1) < x \leq \bar{x}, \\ h_1(\bar{x}+1, s+1)+1, & \text{если } \bar{x} < x \leq s+1 \end{cases}$$

и переходим к $(s+2)$ -ому шагу.

б) Для любых x и j имеет место $\neg Q(x, j)$. Тогда положим $E_{s+1} = B$.

Если $B = \emptyset$, то положим

$$f(x, s+1) = 0, \quad \text{где } 0 \leq x \leq s+1;$$

если $B \neq \emptyset$, то как и выше, имеем $B = A_c$; тогда полагаем

$$f(x, s+1) = \begin{cases} f(x, s), & \text{если } 0 \leq x \leq d(x_c, s+1), \\ h(x_c+1, s+1)+1, & \text{если } x_c < x \leq s+1 \end{cases}$$

и переходим к шагу $(s+2)$.

Этим завершается построение функции f .

Можно показать, что построенная функция f — требуемая.

Вычислительный центр Академии наук Армянской ССР
и Ереванского государственного университета

ՈՒՄԱՐ ԵՐԵՎԱՆ

ԵՐԿՈՒ ԹԵՈՐԵՄՆԵՐ ՓԱՆԴՈՐՎԵՐԻ ՂԱՍԵՐԻ ՎԵՐԱԲԵՂՅԱԼ

Հոդվածում ապացուցվում են հետևյալ երկու թեորեմները:

1. Գոյություն ունի ընվադող սահմանային ռեկուրսիվ այնպիսի ֆունկցիա:

որ այդ ֆունկցիան մաժորում է կամայական ընդհանուր ռեկուրսիվ ֆունկցիայի և այդ ֆունկցիայով որոշվող փակդոթների դասը համընկնում է կոնստրուկտիվ իրական թվերի դասի հետ:

2. Նախօրոք տրված g և h չնվազող սահմանային ռեկուրսիվ ֆունկցիաների համար գոյություն ունի չնվազող սահմանային ռեկուրսիվ ֆունկցիա f , այնպես որ h -ը չի մաժորում f -ին և g ու f ֆունկցիաներով որոշվող փակդոթների դասերը համընկնում են:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ E. M. Gold, J. Symb. Logic, v 30, 1 (1965). ² Б. А. Кушнер, Сб. работ по теории алгоритмов и мат. логике, М., ВЦ АН СССР, 1974. ³ А. А. Марков, Тр. Мат. ин-та АН СССР, т. 67 (1962). ⁴ Н. А. Шанин, Тр. Мат. ин-та АН СССР, т. 52 (1958). ⁵ Б. А. Кушнер, Лекции по конструктивному мат. анализу, Наука, М., 1973. ⁶ А. А. Марков, Тр. Мат. ин-та АН СССР, т. 52 (1958). ⁷ Х. Роджерс, Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, Мир, М., 1972. ⁸ С. М. Меликян, ДАН Арм. ССР, т. 73, № 2 (1981). ⁹ С. М. Меликян, Тезисы IV Всесоюзной конференции по мат. логике, Кишинев, 1976. ¹⁰ Н. В. Петри, Сб. работ по теории алгоритмов и мат. логике, М., ВЦ АН СССР, 1974.