ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXIII 1981 5

УДК 517.942

МАТЕМАТИКА

Г. Ю. Таманян

Об асимптотике спектра оператора Штурма—Лиувилля

(Представлено чл-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 18/VI 1981)

Рассматривается оператор L, порожденный в $L_2(-\infty, \infty)$ дифференциальным выражением

$$ly = -y'' + q(x)y, \tag{1}$$

где $q(x)$—1-периодический, аналитический потенциал.

Спектр оператора L, как известно, является непрерывным, причем в нем имеется, вообще говоря, счетное количество лакун. Обозначим через Δ_n ширину n-ой лакуны.

Ставится вопрос нахождения асимптотики Δ_n при $n\to\infty$. В статье ([1]) была получена формула для длины лакуны

$$\Delta_n = |ln^2\varepsilon^+(\lambda_{n1}) - ln^2\varepsilon^-(\lambda_{n2})|, \tag{2}$$

где

$$\varepsilon^{\pm}(\lambda) = \frac{[2-\Phi(\lambda)] \pm \sqrt{[2-\Phi(\lambda)]^2 - \sum\limits_{\nu=0}^{N}\frac{a_\nu}{\lambda^\nu}\sum\limits_{\nu=0}^{N}\frac{(-1)^\nu a_\nu}{\lambda^\nu}}}{2\sum\limits_{\nu=0}^{N}\frac{a_\nu}{\lambda^\nu}},$$

а λ_{n1} и λ_{n2} две серии корней уравнения $\Delta(\lambda)=2$ (аналогично для уравнения $\Delta(\lambda)=-2$, см. ([1])).

В этой статье будет приведен дальнейший анализ формулы (2) и потому будут использованы результаты и обозначения статьи ([1]).

Обозначим через μ_n величину, которая служит мерой асимметричности последовательностей λ_{n1} и λ_{n2}.

$$\lambda_{n2} = -\lambda_{n1} + \mu_n. \tag{3}$$

Для μ_n можно получить некоторое аналитическое выражение. Именно (см. ([1]))

$$e^{i\lambda_{n1}} = \varepsilon^+(\lambda_{n1});$$

$$e^{i\lambda_{n2}} = \varepsilon^-(\lambda_{n2}).$$

Поэтому

$$\lambda_{n1}+\lambda_{n2}=i\ln(\varepsilon^{+}(\lambda_{n1})\cdot\varepsilon^{-}(\lambda_{n2})).$$

Следовательно, в силу (3)

$$\mu_n=i\ln(\varepsilon^{+}(\lambda_{n1})\cdot\varepsilon^{-}(\lambda_{n2})), \tag{4}$$

а потому формула (2) принимает вид:

$$\Delta_n=\left|\mu_n\times\ln\left(\frac{\varepsilon^{-}(\lambda_{n2})}{\varepsilon^{+}(\lambda_{n1})}\right)\right|. \tag{5}$$

Очевидно, главный член асимптотики Δ_n в (5) мы получим, если учтем главные части λ_{n1} и λ_{n2} в (5).

$$\Delta_n\doteq\left|\mu_n\times\ln\frac{\varepsilon^{-}(-n+\mu_n)}{\varepsilon^{+}(n)}\right| \tag{6}$$

$$\mu_n\doteq i\ln(\varepsilon^{+}(n)\cdot\varepsilon^{-}(-n+\mu_n)); \tag{7}$$

Итак получена

Теорема 1. *Если $\mu_n=\lambda_{n2}+\lambda_{n1}$, то для ширины n-ой лакуны Δ_n в спектре оператора L верна формула* (5), *а главный член асимптотики Δ_n описывается в* (6) *и* (7).

Формула (7) представляет собой нелинейное уравнение относительно μ_n. Его предлагается решать методом Ньютона—Канторовича ([2]).

Итак, рассмотрим уравнение

$$p(\mu)=i\mu-\ln(\varepsilon^{+}(n)\cdot\varepsilon^{-}(\mu-n)). \tag{8}$$

Здесь фиксируем n и обозначаем через μ_0 начальное приближение. Обозначим через

$$\eta=\frac{1+\ln M(n)}{1-\dfrac{Q(n)}{m(n)}}, \tag{9}$$

где

$$M(n)=\max_{\mu\in\Omega_0}|\varepsilon^{-}(\mu-n)|;$$

$$m(n)=\min_{\mu\in\Omega_0}|\varepsilon^{-}(\mu-n)|;$$

$$Q(n)=\max_{\mu\in\Omega_0}|\varepsilon^{-\prime}(\mu-n)|,$$

а через K обозначим величину

$$K=\frac{Q^2(n)+N(n)M(n)}{m(n)(m(n)-Q(n))}, \tag{10}$$

где

$$N(n)=\max_{\mu\in\Omega_0}|\varepsilon^{-\prime\prime}(\mu-n)|$$

и

$$\Omega_0=\{\mu:|\mu_0-\mu|\leqslant r\}. \tag{11}$$

Опираясь на теорему Канторовича ([2]), получаем следующий результат.

Теорема 2. *Если потенциал $q(x)$ таков, что числа K и η (см. (9) и (10)) удовлетворяют соотношению*

$$h = K\eta \leqslant \frac{1}{2}$$

и r (в (11)) таково, что

$$r \geqslant r_0 = \frac{1-\sqrt{1-2h}}{h}\,\eta,$$

то процесс Ньютона, определяемый формулой

$$\mu_{k+1} = \mu_k - \frac{P(\mu_k)}{P'(\mu_0)}; \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{12}$$

сходится к μ^*, являющемуся решением уравнения

$$P(\mu) = 0,$$

причем

$$|\mu^* - \mu_0| \leqslant r_0.$$

И если, сверх того, при

$$r < r_1 = \frac{1+\sqrt{1-2h}}{h}\,\eta, \tag{13}$$

то в области Ω_0 имеется единственное решение μ^* уравнения (8) и скорость сходимости процесса Ньютона к решению можно оценить так:

$$|\mu_k - \mu^*| \leqslant \frac{\eta}{h}\,(1-\sqrt{1-2h})^{k+1} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

В качестве следствия из теоремы 2 можно получить следующий критерий конечнозонности потенциала.

Теорема 3. *Если потенциал $q(x)$ таков, что начиная с некоторого n_0 число $h = K\eta < \dfrac{1}{2}$ и имеет место (13), то в спектре оператора L имеется не более чем n_0 лакун.*

Доказательство. Достаточно заметить, что уравнение $P(\mu) = 0$ имеет для любого n решение $\mu = 0$. Следовательно, как только выполняется условие (13) единственности решения в схеме Ньютона—Канторовича, так тотчас $\mu_n = 0$ при $n \geqslant n_0$, а следовательно, в силу (6) и $\Delta_n = 0$ при $n \geqslant n_0$. Теорема доказана.

Дальнейший анализ применимости теоремы 2 показывает

Теорема 4. *Каковым бы ни был аналитический 1-периодический потенциал $q(x)$, для достаточно большого n, процесс Ньютона (12) осуществим, т. е. выполнены условия теоремы 2.*

Доказательство. Можно видеть, что

$$\Phi(\lambda)=O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \qquad \lambda\to\pm\infty;$$

$$\Phi'(\lambda)=O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \qquad \lambda\to\pm\infty;$$

$$\Phi''(\lambda)\to\pm\infty, \qquad \lambda\to\pm\infty.$$

Поэтому

$$\varepsilon^{-''}(\lambda)=O(\lambda^{1/2}), \quad \lambda\to\pm\infty,$$

и следовательно число

$$h=K\eta=O(\lambda^{-1/2}), \qquad \lambda\to\pm\infty,$$

и при достаточно большом λ

$$h\leqslant\frac{1}{2}.$$

Теорема доказана.

В заключение автор выражает глубокую благодарность А. Г. Костюченко за внимание к работе.

Ереванский государственный
универсистет

Գ. ՅՈՒ. ԹԱՄԱՆՅԱՆ

Շտուրմ—Լիուվիլլի օպերատորի սպեկտրի մասին

Հոդվածում դիտարկվում է L օպերատորը, ծնվող $L_2(-\infty, \infty)$ տարածության մեջ հետևյալ դիֆերենցիալ արտահայտությամբ՝

$$ly=-y''+q(x)y,$$

որտեղ $q(x)$—պարբերական $(q(x+1)=q(x))$ և անալիտիկ է։

Ստացված է L օպերատորի սպեկտրում n-րդ լակունայի երկարության համար Δ_n ասիմպտոտիկայի գլխավոր անդամը նկարագրող բանաձևը $(n\to\infty)$։ Առաջարկվում է Նյուտոնի—Կանտորովիչի մեթոդը ասիմպտոտիկան ստանալու համար։

Ապացուցվում է՝ ինչ պայմանների դեպքում L օպերատորի սպեկտրում կա վերջավոր թվով լակուններ։

Ցույց է տրվում, որ բավականաչափ մեծ n-երի համար, Նյուտոն-Կանտորովիչի մեթոդը կիրառելի է յուրաքանչյուր պարբերական անալիտիկ պոտենցիալի համար։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Г. Ю. Таманян*, ДАН АрмССР, т. 70, № 3 (1980). [2] *Л. В. Канторович, Г. П. Акилов*, Функциональный анализ, Наука, М., 1977.