ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXIII 1981 5

УДК 513.8

МАТЕМАТИКА

М. И. Караханян

Асимптотический вариант теоремы Фуглида—Путнама о коммутаторах линейных ограниченных операторов в сильной и слабой операторных топологиях

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 10/VI 1981)

Пусть H—гильбертово пространство над полем $\mathbf{C}$ и $\mathbf{B}(H)$—алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих на H в равномерной операторной топологии. Теорема Фуглида утверждает, что если для нормального оператора $N\in\mathbf{B}(H)$ и для оператора $T\in\in\mathbf{B}(H)$ имеет место соотношение $NT=TN$, то $N^*T=TN^*$. Путнам обобщил эту теорему, установив, что если для пары нормальных операторов N_1, $N_2\in\mathbf{B}(H)$ имеет место условие $N_1T=TN_2$, где $T\in\mathbf{B}(H)$, то $N_1^*T=TN_2^*$ (см., например, ([1]), с. 337). Позднее Р. Муром (см. ([2])) был получен асимптотический вариант теоремы Фуглида — Путнама: при фиксированных нормальных операторах N_1, $N_2\in\mathbf{B}(H)$ для каждого оператора T с $\|T\|\leqslant 1$ и каждого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что из $\|N_1T-TN_2\|<\delta$ следует $\|N_1^*T-TN_2^*\|<\varepsilon$. В дальнейшем Е. А. Горин и автор в ([3]) усилили результаты из ([2]), установив, в частности, следующую теорему. Пусть a_1, a_2, b_1, b_2—такие элементы комплексной банаховой алгебры, что $[a_1, b_1]=[a_2, b_2]=0$ и $\|e^{\bar{\lambda}a_1-\lambda b_1}\|=o(|\lambda|^{1/2})$, $\|e^{\bar{\lambda}a_2-\lambda b_2}\|=o(|\lambda|^{1/2})$ при $|\lambda|\to\infty$. Тогда равномерно в каждом шаре $\|x\|\leqslant\leqslant R<\infty$ имеет место неравенство $\|b_1x-b_2x\|\leqslant\varphi(\|a_1x-xa_2\|)$, где $\varphi(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$. Из этой теоремы, кстати, следует, что „нормально сопряженный“ элемент b к элементу a, т. е. такой, что $\|e^{\bar{\lambda}a-\lambda b}\|=o(|\lambda|^{1/2})$ и $[a, b]=0$, определяется однозначно, если он существует.

Недавно Д. Роджерс (см. ([4])) показал, что теорема Мура остается справедливой, если в алгебре операторов гильбертова пространства вместо равномерной рассмотреть сильную или слабую операторную топологию.

В данной работе, используя методику работы ([3,4]), мы обобщаем результаты работы ([4]) в том же духе, в каком работа ([3]) обобщает теорему Фуглида—Путнама—Мура.

Теорема. *Пусть X — банахово пространство $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathbf{B}(X)$, причем $[A_1, B_1] = [A_2, B_2] = 0$ и $\|e^{\lambda B_1 - \bar{\lambda} A_1}\| = o(|\lambda|^{1/2})$, $\|e^{\lambda B_2 - \bar{\lambda} A_2}\| = o(|\lambda|^{1/2})$ при $|\lambda| \to \infty$. Тогда для каждой окрестности нуля U в сильной (или слабой) операторной топологии существует такая окрестность нуля V (в той же топологии), что из условий $\|T\| \leqslant 1$ и $A_1T - TA_2 \in V$ следует, что $B_1T - TB_2 \in U$.*

Доказательство. Доказательство проведем сначала для сильной операторной топологии. Не ограничивая общности, можно считать, что $\|A_i\| \leqslant 1$, $\|B_i\| \leqslant 1$, где $i = 1, 2$. Чтобы упростить выкладки, положим $\omega(r) = \max\limits_{|\lambda| = r} \|e^{\lambda B_i - \bar{\lambda} A_i}\|$, где $i = 1, 2$. Так как $\omega(r) = o(r^{1/2})$, то по каждому $\varepsilon > 0$ найдется такое $r > 0$, что $\frac{[\omega(r)+1]^2+1}{r} < \varepsilon$. Пусть $K = [\omega(r)+1]^2 + 1$ и $\Gamma_r = \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| = r\}$. Пусть натуральное число n таково, что $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \frac{r^k}{k!} < e^{-r}$. Рассмотрим окрестность нуля

$$U = U(x, \varepsilon) = \{T : \|Tx\| < \varepsilon, \text{ где } x \in X, \|x\| = 1\}.$$

Пусть $h_i(\lambda) = e^{\lambda B_i}$, где $i = 1, 2$. Тогда функции $h_i(\lambda)$ — равномерно непрерывные функции от λ на Γ_r со значением в $\mathbf{B}(X)$. Поэтому существует такое конечное множество $\mathbf{P} \subset \Gamma_r$, что для каждого $\lambda \in \Gamma_r$ при подходящем $\gamma \in \mathbf{P}$

$$\|h_1(\lambda) - h_1(\gamma)\| + \|h_2(-\lambda) - h_2(-\gamma)\| < e^{-r}.$$

Пусть $\delta = (re^{2r})^{-1}$ и

$$V = V(\delta, \mathbf{P}) = \{L : \|LA_2^l y_\gamma\| < \delta, \text{ где } y_\gamma = e^{-(\gamma B_2 - \bar{\gamma} A_2)}x, \ \gamma \in \mathbf{P}; \ l = 0, \dots, n\}.$$

Понятно, что $\|y_\gamma\| \leqslant \omega(r)$. Возьмем произвольный линейный оператор T с $\|T\| \leqslant 1$ и рассмотрим векторнозначную целую функцию $f(\lambda) = h_1(\lambda)Th_2(-\lambda)x = e^{\lambda B_1}Te^{-\lambda B_2}x$. Так как $\|h_i(\lambda)\| \leqslant e^r$, то для $\lambda, \gamma \in \Gamma_r$, где $\gamma \in \mathbf{P}$, имеем

$$\|f(\lambda) - f(\gamma)\| \leqslant e^r\{\|h_1(\lambda) - h_1(\gamma)\| + \|h_2(-\lambda) - h_2(-\gamma)\|\} < 1.$$

Отсюда получаем, что $\|f\|_r \leqslant \max\{\|f(\gamma)\| : \gamma \in \mathbf{P}\} + 1$, где $\|f\|_r = \max\{\|f(\lambda)\| : |\lambda| = r\}$.

Оценим $\|f(\gamma)\|$, когда $\gamma \in \mathbf{P}$:

$$\|f(\gamma)\| = \|e^{\gamma B_1}Te^{-\gamma B_2}x\| \leqslant \omega^2(r) + \|e^{\gamma B_1}(e^{-\bar{\gamma} A_1}T - Te^{-\bar{\gamma} A_2}) \times$$
$$\times e^{-(\gamma B_2 - \bar{\gamma} A_2)}x\| \leqslant \omega^2(r) + e^r\|(e^{-\bar{\gamma} A_1}T - Te^{-\bar{\gamma} A_2})y_\gamma\|.$$

Теперь заметим, что

$$\|(e^{-\bar{\gamma} A_1}T - Te^{-\bar{\gamma} A_2})y_\gamma\| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{r^k}{k!}\|(A_1^kT - TA_2^k)y_\gamma\| + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{r^k}{k!}\|(A_1^kT - TA_2^k)y_\gamma\|,$$

а так как

$$A_1^kT - TA_2^k = \sum_{l=0}^{k-1} A_1^{k-1-l}(A_1T - TA_2)A_2^l \text{ и } A_1T - TA_2 \in V, \text{ то}$$

$$\|(A_1^kT - TA_2^k)y_\gamma\| \leqslant k\delta.$$

Таким образом, имеем, что

$$\|(e^{-\bar{\gamma}A_1}T-Te^{-\bar{\gamma}A_2})y_\gamma\|\leqslant e^{-r}[1+2\omega(r)].$$

Окончательно получаем, что $\|f\|_r\leqslant[\omega(r)+1]^2+1$.

В силу формулы Коши

$$f'(0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_r}\frac{f(\lambda)}{\lambda^2}\,d\lambda,$$

откуда

$$\|f'(0)\|\leqslant\frac{[\omega(r)+1]^2+1}{r}.$$

Так как $r>\dfrac{K}{\varepsilon}$, то $\|f'(0)\|<\varepsilon$. Но так как $f'(0)=(B_1T-TB_2)x$, то получаем, что $B_1T-TB_2\in U$.

Теперь наметим доказательство для слабой операторной топологии.

Рассмотрим окрестность нуля

$$U=\{T:|\varphi(Tx)|<\varepsilon,\ \text{где}\ \varphi\in X^*,\ x\in X\ \text{с}\ \|x\|=1,\ \|\varphi\|=1\}.$$

Для целой функции $F(\lambda)=\varphi(e^{\lambda B_1}Te^{-\lambda B_2}x)$ положим $M_r(F)=\max\{|F(\lambda)|:|\lambda|=r\}$. Как и выше, для λ и γ из Γ_r, где $\gamma\in\mathbf{P}$, имеем, что $M_r(F)\leqslant\max\{|F(\gamma)|:\gamma\in\mathbf{P}\}+1$.

При $\delta=(re^{2r})^{-1}$ определим окрестность нуля

$$V=\{L:|\psi_\gamma(A_1^{k-1-l}LA_2^ly_\gamma)|<\delta,\ \text{с}\ l=0,\ldots,k-1;\ k=0,\ldots,n,\ \gamma\in\mathbf{P}\},$$

где функционал ψ_γ определяется по формуле $\psi_\gamma(z)=\varphi(e^{\gamma B_1}z)$. Аналогично предыдущему $M_r(F)\leqslant[\omega(r)+1]^2+1$.

Используя интегральную формулу Коши, получаем, что $|F'(0)|\leqslant\dfrac{[\omega(r)+1]^2+1}{r}$, а так как $r>\dfrac{K}{\varepsilon}$, то $|F'(0)|<\varepsilon$. Однако $F'(0)=\varphi[(B_1T-TB_2)x]$, откуда следует, что $B_1T-TB_2\in U$.

Теорема доказана.

Ереванский государственный университет

Մ. Ի. ԿԱՐԱԽԱՆՅԱՆ

Ֆուգլիդ—Պուտնամի թեորեմի ասիմպտոտիկ տարբերակը գծային սահմանափակ օպերատորների վերաբերյալ ուժեղ և թույլ օպերատորային տոպոլոգիաներում

Տվյալ հոդվածում ստացված է հետևյալ արդյունքը։

Դիցուք X-ը—բանախյան տարածություն է և A_1, A_2, B_1, B_2 գծային սահմանափակ օպերատորներ են գործող X տարածությունում, ընդ որում $[A_1, B_1]=[A_2, B_2]=0$ և $\|e^{\lambda B_1-\bar{\lambda}A_1}\|=o(|\lambda|^{1/2})$, $\|e^{\lambda B_2-\bar{\lambda}A_2}\|=o(|\lambda|^{1/2})$, երբ $|\lambda|\to\infty$ Այդ դեպքում զրոյի կամայական U շրջակայքի համար ուժեղ (կամ թույլ)

օպերատորային տոպոլոգիայում գոյություն ունի այնպիսի զրոյի V շրջակայք (նույն տոպոլոգիայում), որ երբ $\|T\| \leqslant 1$ և $A_1T-TA_2 \in V$, ապա $B_1T-TB_2 \in U$:

Նկատենք, որ «նորմալ համալուծ» B օպերատորը A օպերատորի նկատմամբ, այսինքն այնպիսին, որ $[A, B]=0$ և $\|e^{\lambda B-\bar{\lambda} A}\|=o(|\lambda|^{1/2})$ որոշվում է միարժեք, եթե այն գոյություն ունի:

Համասարաչափ օպերատորային տոպոլոգիայի համար վերոհիշյալ արդյունքը մինչ այդ ստացված է եղել Ե. Ա. Գորինի և հեղինակի կողմից:

Երբ X հիլբերտյան տարածություն է և A_1, B_1 նորմալ գծային սահմանափակ օպերատորներ են գործող X տարածությունում, ապա ստացվում են Դ. Ռոջերսի արդյունքները:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *У. Рудин*, Функциональный анализ, Мир, М. 1975. [2] *R. Moore*, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 50, № 7 (1975). [3] *Е. А. Горин, М. И. Караханян*, Мат. заметки, т. 22. № 2 (1977); РЖМат., 12Б911 (1977). [4] *D. D. Rogers*, Proc. Amer. Math. Soc. vol. 75, № 1 (1979).