ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXIII 1981 5

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

А. С. Асратян

Некоторые NP-полные проблемы о вложенных c-сочетаниях двудольного мультиграфа

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 7/VI 1981)

В работе рассматриваются некоторые проблемы, касающиеся существования в двудольном мультиграфе вложенных реберных подмножеств специального вида. Проблемы такого типа возникают, например, при исследовании реберных раскрасок двудольного мультиграфа ([1-3]). Показано, что рассмотренные проблемы являются NP-полными. (Все неопределяемые в настоящей работе понятия можно найти в ([4]) и ([5])).

Пусть $G=(V_1, V_2; E)$—двудольный мультиграф, $H\subseteq E$, а $c(x)$ и $c'(x)$—отличные друг от друга целочисленные функции, определенные на множестве вершин $V_1\cup V_2$ и для каждого $x\in V_1\cup V_2$ удовлетворяющие условию $0\leqslant c(x)\leqslant c'(x)$. Число ребер из H, инцидентных вершине x, будем обозначать через $\rho_H(x)$. Подмножество H называется c-сочетанием (c'-сочетанием) мультиграфа G, если $\rho_H(x)\leqslant c(x)$ ($\rho_H(x)\leqslant c'(x)$) для каждого $x\in V_1\cup V_2$. Наибольшее по числу ребер c-сочетание (c'-сочетание) называется максимальным c-сочетанием (c'-сочетанием) мультиграфа G. Число элементов произвольного множества A будем обозначать через $|A|$.

Замечание 1. Используя алгоритм, предложенный в работе ([6]), максимальное c-сочетание (c'-сочетание) мультиграфа $G=(V_1, V_2; E)$ можно построить за время $O(n^3)$, где $n=|V_1\cup V_2|$.

Цель настоящей работы — доказать NP-полноту следующих проблем.

Проблема 1.

Вход. Двудольный мультиграф $G=(V_1, V_2; E)$, отличные друг от друга целочисленные функции $c(x)$ и $c'(x)$, определенные на множестве $V_1\cup V_2$ и для каждого $x\in V_1\cup V_2$ удовлетворяющие условию $0\leqslant c(x)\leqslant c'(x)$.

Свойство. Существуют такие подмножества F_1 и F_2 множества E, что $F_1\subset F_2$* и для каждого $x\in V_1\cup V_2$ $\rho_{F_1}(x)=c(x)$, $\rho_{F_2}(x)=c'(x)$.

* Здесь и далее подразумевается строгое включение.

Проблема 2

Вход. Двудольный мультиграф $G_2=(V_1, V_2; E_2)$, отличные друг от друга целочисленные функции $c(x)$ и $c'(x)$, определенные на множестве $V_1 \cup V_2$ и для каждого $x \in V_1 \cup V_2$ удовлетворяющие условию $0 \leqslant c(x) \leqslant c'(x)$.

Свойство. Существуют максимальное c-сочетание H_1 и максимальное c'-сочетание H_2 мультиграфа G_2 такие, что $H_1 \subset H_2$.

Проблема 3.

Вход. Двудольный мультиграф $G_3=(V_1, V_2; E_3)$, целое число $m>0$, отличные друг от друга целочисленные функции $c(x)$ и $c'(x)$, определенные на множестве $V_1 \cup V_2$ и для каждого $x \in V_1 \cup V_2$ удовлетворяющие условию $0 \leqslant c(x) \leqslant c'(x)$.

Свойство. Существуют c'-сочетание F_2 и максимальное c-сочетание F_1 мультиграфа G_3 такие, что $F_1 \subset F_2$ и $|F_2| \geqslant m$.

Проблема 4

Вход. Двудольный мультиграф $G_4=(V_1, V_2; E_4)$, целые числа m_1 и m_2, $0 \leqslant m_1 < m_2$, отличные друг от друга целочисленные функции $c(x)$ и $c'(x)$, определенные на множестве $V_1 \cup V_2$ и для каждого $x \in V_1 \cup V_2$ удовлетворяющие условию $0 \leqslant c(x) \leqslant c'(x)$.

Свойство. Существуют c-сочетание H_1 и c'-сочетание H_2 мультиграфа G_4 такие, что $H_1 \subset H_2$, $|H_1|=m_1$, $|H_2|=m_2$.

В работе [7] исследовалась проблема составления расписания, которая формулируется следующим образом.

Вход. 1) множество $H=\{1, 2, 3\}$;

2) подмножества $T_1, \ldots, T_n$, где $T_i \subseteq H$ и $|T_i| \geqslant 2$, $i=1, \ldots, n$.

3) $(0-1)$-матрица $R=(R_{ij})$ размерности $n \times m$, где $\sum_{j=1}^{m} R_{ij}=|T_i|$, $i=1, \ldots, n$.

Свойство. Существует такая функция $f(i, j, h)$, $f(i, j, h) \in \{0,1\}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$, $1 \leqslant h \leqslant 3$, что

а) $f(i, j, h)=1 \Rightarrow h \in T_i$;

б) $\sum_{h=1}^{3} f(i, j, h)=R_{ij}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$;

в) $\sum_{i=1}^{n} f(i, j, h) \leqslant 1$, $1 \leqslant j \leqslant m$, $1 \leqslant h \leqslant 3$;

г) $\sum_{j=1}^{m} f(i, j, h) \leqslant 1$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant h \leqslant 3$.

Утверждение 1 [7]. Проблема составления расписания является NP-полной.

Утверждение 2. Проблема составления расписания полиномиально сводится к проблеме 1.

Доказательство. Пусть $N_1=\{i/T_i=\{2, 3\}, 1 \leqslant i \leqslant n\}$, $N_2=\{i/T_i=\{1, 3\}, 1 \leqslant i \leqslant n\}$, $N_3=\{i/T_i=\{1, 2\}, 1 \leqslant i \leqslant n\}$, $N_4=\{i/T_i=\{1,2,3\},$

$1\leqslant i\leqslant n\}$, $|N_i|=n_i$, $i=1, 2, 3, 4$. Ясно, что $N_i\cap N_j=\varnothing$, $1\leqslant i<j\leqslant 4$, $n_1+n_2+n_3+n_4=n$. Из условий (б) и (в) следует, что $\sum\limits_{i=1}^{n} R_{ij}\leqslant 3$, $j=1, \ldots m$. Определим двудольный мультиграф $G_1=(V_1, V_2; E_1)$ следующим образом. Положим $V_1=\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$, $V_2=\{y_1, \ldots, y_m\}$. Во множество E_1 внесем ребро (x_i, y_j) с кратностью 1, если $R_{ij}=1$, $1\leqslant i\leqslant n$, $1\leqslant j\leqslant m$, и ребро (x_{n+1}, y_j) с кратностью $3-\sum\limits_{i=1}^{n} R_{ij}$, $j=1, \ldots, m$. Тогда $\rho_{E_1}(x_{n+1})=3m-\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} R_{ij}=3m-\sum\limits_{i=1}^{n}|T_i|=3m-(2n_1+2n_2+2n_3+3n_4)=3m-2n-n_4\geqslant 0$. На множестве вершин $V_1\cup V_2$ определим функции $c(x)$ и $c'(x)$ следующим образом. Для каждой вершины $z\in N_1$ положим $c(z)=0$, $c'(z)=1$, для каждой вершины $z\in N_2$ положим $c(z)=c'(z)=1$, для каждой вершины $z\in N_3\cup N_4\cup V_2$ положим $c(z)=1$, $c'(z)=2$, а для вершины x_{n+1} положим $c(x_{n+1})=\max\{0, m-n+n_1\}$, $c'(x_{n+1})=\max\{c(x_{n+1}), 2m-2n+n_1+n_2\}$. Пусть существует функция $f(i, j, h)$, удовлетворяющая условиям а) — г). Тогда $m\geqslant n_2+n_3+n_4$, $m\geqslant n_1+n_3+n_4$, $m\geqslant n_1+n_2+n_4$ и поэтому $0\leqslant m-n+n_1=c(x_{n+1})\leqslant c'(x_{n+1})=2m-2n+n_1+n_2\leqslant\rho_{E_1}(x_{n+1})$. В мультиграфе G_1 определим подмножества ребер F_1 и F_2 следующим образом.

1. Если $f(i, j, 1)=1$, то ребро (x_i, y_j) внесем и в F_1, и в F_2, а если $f(i, j, 2)=1$, то ребро (x_i, y_j) внесем в $F_2\setminus F_1$, $1\leqslant i\leqslant n$, $1\leqslant j\leqslant m$.

2. Если $\sum\limits_{i=1}^{n} R_{ij}=2$, то при $\sum\limits_{i=1}^{n} f(i, j, h)=0$ ребро (x_{n+1}, y_j) внесем и в F_1, и в F_2, а при $\sum\limits_{i=1}^{n} f(i, j, 1)=1$, $\sum\limits_{i=1}^{n} f(i, j, 2)=0$ ребро (x_{n+1}, y_j) внесем в $F_2\setminus F_1$, $1\leqslant j\leqslant m$.

3. Если $\sum\limits_{i=1}^{n} R_{ij}=1$, то ребро (x_{n+1}, y_j) входит во множество E_1 с кратностью 2. При $\sum\limits_{h=1}^{2}\sum\limits_{i=1}^{n} f(i, j, h)=0$ одно из ребер (x_{n+1}, y_j) внесем и в F_1, и в F_2, а другое — в $F_2\setminus F_1$; при $\sum\limits_{i=1}^{n} f(i, j, 1)=1$ одно из ребер (x_{n+1}, y_j) внесем в $F_2\setminus F_1$, а при $\sum\limits_{i=1}^{n} f(i, j, 2)=1$ одно из ребер (x_{n+1}, y_j) внесем и в F_1, и в F_2, $1\leqslant j\leqslant m$.

Ясно, что $|F_1|=m$, $|F_2|=2m$ и $\rho_{F_1}(z)=c(z)$, $\rho_{F_2}(z)=c'(z)$ для каждого $z\in V_1\cup V_2\setminus\{x_{n+1}\}$. Поскольку вершинам $x_1, \ldots, x_n$ инцидентно $n_2+n_3+n_4$ ребер из F_1 и $n_1+n_2+2n_3+2n_4$ ребер из F_2, то $\rho_{F_1}(x_{n+1})=m-(n_2+n_3+n_4)=m-n+n_1=c(x_{n+1})$, $\rho_{F_2}(x_{n+1})=2m-(n_1+n_2+2n_3+2n_4)=2m-2n+n_1+n_2=c'(x_{n+1})$. Таким образом подмножества F_1 и F_2 удовлетворяют требуемым условиям.

Обратно, пусть в G_1 существуют такие подмножества F_1 и F_2, что для каждого $z\in V_1\cup V_2$ выполняется $\rho_{F_1}(z)=c(z)$, $\rho_{F_2}(z)=c'(z)$ и $F_1\subset F_2$. Определим функцию $f(i, j, h)$ следующим образом. Если $(x_i, y_j)\in F_1$, положим $f(i,j,1)=1$, $f(i,j,2)=f(i,j,3)=0$; если $(x_i, y_j)\in F_2\setminus F_1$, положим $f(i, j, 2)=1$, $f(i, j, 1)=f(i, j, 3)=0$; если $(x_i, y_j)\in E_1\setminus F_2$, положим $f(i, j, 3)=1$, $f(i, j, 1)=f(i, j, 2)=0$, а если $(x_i, y_j)\notin E_1$, положим $f(i, j, h)=0$, $h=1, 2, 3$, $1\leqslant i\leqslant n$, $1\leqslant j\leqslant m$. Нетрудно проверить, что функция $f(i, j, h)$ удовлетворяет требованиям а) — г). Утверждение 2 доказано.

Утверждение 3. Проблема 1 полиномиально сводится к проблеме 2.

Доказательство. Пусть t_1 и t_2 — числа ребер, соответственно, в максимальном c-сочетании и в максимальном c'-сочетании мультиграфа G_1. (Числа t_1 и t_2 можно найти за время $O(n^3)$, где $n=|V_1\cup V_2|$ (см. замечание 1)). Мультиграфу $G_1=(V_1, V_2; E_1)$ сопоставим мультиграф $G_2=(V_1, V_2; E_2)$ следующим образом. Если $t_1=\frac{1}{2}\sum\limits_{x\in V_1\cup V_2} c(x)$ и $t_2=\sum\limits_{x\in V_1\cup V_2} c'(x)$, положим $E_2=E_1$. В противном случае положим $E_2=\varnothing$. Пусть в G_1 существуют такие подмножества ребер F_1 и F_2, что $F_1\subset F_2$ и для каждого $x\in V_1\cup V_2$ $\rho_{F_1}(x)=c(x)$, $\rho_{F_2}(x)=c'(x)$. Тогда $|F_1|=\frac{1}{2}\sum\limits_{x\in V_1\cup V_2} c(x)$, $|F_2|=\frac{1}{2}\sum\limits_{x\in V_1\cup V_2} c'(x)$. Ясно, что F_1 является максимальным c-сочетанием, а F_2 — максимальным c'-сочетанием мультиграфа G_1. Поэтому $G_2=G_1$ и в качестве H_1 и H_2 в G_2 можно взять, соответственно, F_1 и F_2. Обратно, пусть в G_2 существуют максимальное c-сочетание H_1 и максимальное c'-сочетание H_2 такие, что $H_1\subset H_2$. Тогда $E_2\neq\varnothing$ и из определения мультиграфа G_2 следует, что $G_2=G_1$, $|H_1|=t_1=\frac{1}{2}\sum\limits_{x\in V_1\cup V_2} c(x)$, $|H_2|=t_2=\frac{1}{2}\sum\limits_{x\in V_1\cup V_2} c'(x)$. Отсюда и из условия: для каждого $x\in V_1\cup V_2$ $\rho_{H_1}(x)\leqslant c(x)$, $\rho_{H_2}(x)\leqslant c'(x)$ — следует, что $\rho_{H_1}(x)=c(x)$, $\rho_{H_2}(x)=c'(x)$ для каждого $x\in V_1\cup V_2$. Поэтому в качестве подмножеств F_1 и F_2 в G_1 можно взять, соответственно, подмножества H_1 и H_2. Утверждение 3 доказано.

Утверждение 4. Проблема 2 полиномиально сводится к проблеме 3.

Для доказательства достаточно положить $G_3=G_2$ и $m=t_2$, где t_2 — число ребер в максимальном c'-сочетании мультиграфа G_2.

Утверждение 5. Проблема 3 полиномиально сводится к проблеме 4.

Для доказательства достаточно положить $G_4=G_3$, $m_1=t_1$,

$$m_2=\begin{cases} m, & \text{если } m>t_1,\\ t_1+1, & \text{если } m\leqslant t_1,\end{cases}$$

где t_1 — число ребер в максимальном c-сочетании мультиграфа G_3.

Пусть $G_4=(V_1, V_2; E_4)$, $F\subseteq E_4$, $|F|=m_2$, $n=|V_1\cup V_2|$.

Замечание 2. За время $O(n^2)$ можно выяснить, является ли подмножество F c'-сочетанием.

Замечание 3. За время $O(n^3)$ можно выяснить, существует ли подмножество $F_1 \subseteq F$, $|F_1| = m_1$, являющееся c-сочетанием мультиграфа G_4. (Для этого достаточно определить число ребер в максимальном c-сочетании мультиграфа $G = (V_1, V_2; F)$ (см. замечание 1)).

Теорема. *Проблемы* 1, 2, 3, 4 *являются* NP-*полными*.

Доказательство. Из результатов работы (5) и из утверждений 1—5 следует, что для доказательства теоремы достаточно показать, что проблема 4 принадлежит классу NP. Для этого опишем недетерминированный полиномиальный алгоритм для определения того, существуют ли в G_4 c-сочетание F_1 и c'-сочетание F_2 такие, что $|F_1| = m_1$, $|F_2| = m_2$ и $F_1 \subset F_2$. Алгоритм недетерминированно выбирает из E_4 подмножество F из m_2 ребер и (см. замечания 2, 3) за время $O(n^3)$ проверяет: является ли F c'-сочетанием и содержит ли F c-сочетание мультиграфа G_4, состоящее из m_1 ребер. Этим показано, что проблема 4 принадлежит классу NP. Теорема доказана.

Автор благодарен Г. Б. Маранджяну за полезные советы.

Ереванский государственный
университет

Ա. Ս. ՀԱՍՐԱԹՅԱՆ

Որոշ NP-լրիվ պրոբլեմներ երկկողմանի մուլտիգրաֆի ներդրված c-զուգակցությունների մասին

Դիցուք $G = (V_1, V_2; E)$ երկկողմանի մուլտիգրաֆի գագաթների բազմության վրա որոշված են $c(x)$ և $c'(x)$ ամբողջ արժեքներ ընդունող ֆունկցիաներ, որտեղ $0 \leqslant c(x) \leqslant c'(x)$ ամեն մի x գագաթի համար։ G մուլտիգրաֆի H կողային ենթաբազմությունը կոչվում է c-զուգակցություն (c'-զուգակցություն), եթե $\rho_H(x) \leqslant c(x)$ ($\rho_H(x) \leqslant c'(x)$) ամեն մի x գագաթի համար, որտեղ $\rho_H(x)$-ը դա H բազմությունից x գագաթին կից կողերի քանակն է։ Ամենաշատ կող պարունակող c-զուգակցությունը (c'-զուգակցությունը) կոչվում է G մուլտիգրաֆի մաքսիմալ c-զուգակցություն (c'-զուգակցություն)։ Աշխատանքում դիտարկվում են հետևյալ չորս ճանաչելիության պրոբլեմները։

1. Գոյություն ունե՞ն արդյոք G մուլտիգրաֆի այնպիսի F_1 և F_2 կողային ենթաբազմություններ, որ $F_1 \subset F_2$, $\rho_{F_1}(x) = c(x)$ և $\rho_{F_2}(x) = c'(x)$ ամեն մի x գագաթի համար։

2. Գոյություն ունե՞ն արդյոք G մուլտիգրաֆի այնպիսի F_1 մաքսիմալ c-զուգակցություն և F_2 մաքսիմալ c'-զուգակցություն, որ $F_1 \subset F_2$։

3. Գոյություն ունե՞ն արդյոք G մուլտիգրաֆի այնպիսի F_1 մաքսիմալ c-զուգակցություն և այնպիսի F_2 c'-զուգակցություն, որ $F_1 \subset F_2$ և $|F_2| \geqslant m$, որտեղ m-ը բնական թիվ է։

4. Գոյություն ունե՞ն արդյոք G մուլտիգրաֆի այնպիսի F_1 c-զուգակ-

ցություն և F_2 c'-զուգակցություն, որ $F_1 \subset F_2$, $|F_1| = m_1$ և $|F_2| = m_2$, որտեղ m_1 և m_2-ը ամբողջ թվեր են և $0 \leq m_1 < m_2$:

Ցույց է տրված, որ այդ չորս պրոբլեմներն էլ NP-լրիվ են ըստ Ռ. Կարպի:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. С. Асратян*, Вестн. МГУ, сер. вычисл. математика и кибернетика, № 1, 1978. [2] *А. С. Асратян*, Сб. работ по мат. кибернетике, вып. 2, ВЦ АН СССР, 1977. [3] *D. de Werra*, Discrete Mathem., 1, 167—179 (1971). [4] *Ф. Харари*, Теория графов, Мир, М., 1973. [5] *Р. Карп*, Кибернетический сб. (новая серия), вып. 12, Мир, М., 1975. [6] *А. В. Карзанов*. ДАН СССР, т. 215, № 1 (1974). [7] *S. Even*, *A. Ital*, *A. Shamir*, SIAM J. Comput., vol. 5, № 4 (1976).