ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXIII 1981 4

УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. М. Мхитарян

К задаче контактного взаимодействия между полубесконечным неоднородным стрингером и упругой полуплоскостью или плоскостью

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 13/IV 1981)

Контактная задача о передаче нагрузки от бесконечного стрингера к упругой полуплоскости в рамках известных предположений впервые поставлена и решена в работе [1]. Аналогичная задача для полубесконечного стрингера, нагруженного на своем конце горизонтальной сосредоточенной силой, рассматривалась в [2–5]. В работе [3] решение разрешающего интегро-дифференциального уравнения сведено к решению разностного уравнения простой структуры, построенному в замкнутой форме. Эта же самая задача с точки зрения применения метода Винера—Хопфа обсуждалась в [6,7], причем в [7] сила приложена к стрингеру на произвольном расстоянии от его конца. Задача о контактном взаимодействии между двумя одинаковыми полуплоскостями и полубесконечным стрингером исследована в работе [8], где применялась методика Койтера [3].

Однако следует отметить, что развитые в указанных работах методы не позволяют получить решение задачи в случае полубесконечного неоднородного стрингера. Кроме того, в построенных в них решениях в явном виде не выделена присущая тангенциальным контактным напряжениям особенность на конце стрингера. В настоящей статье на основе одного интегрального соотношения Гильберта вновь рассматривается задача о контактном взаимодействии между полубесконечным стрингером и упругой полуплоскостью или плоскостью. При этом стрингер обладает достаточно общей неоднордностью. К разрешающему интегро-дифференциальному уравнению, преобразованному определенным образом, применяется принцип неподвижной точки Банаха. Предварительно его решение представляется формулой, содержащей в явном виде присущую тангенциальным контактным напряжениям на конце стрингера особенность. В одном частном случае неоднородности получено простое решение задачи.

1. Пусть упругая полуплоскость, находящаяся в условиях обобщенного плоского напряженного состояния, с модулем упругости E_2 и коэффициентом Пуассона ν_2 на своей границе усилена приваренным или приклеенным к ней упругим полубесконечным стрингером с модулем упругости E_s, коэффициентом Пуассона ν_1, шириной d и площадью поперечного сечения A_s. Пусть далее стрингер загружен на своем конце сосредоточенной силой P, а на верхнем краю — тангенциальными силами произвольной интенсивности $\tau_{0s}(x)$. В предположении, что стрингер не обладает изгибной жесткостью и его модуль упругости изменяется по длине $E_s = E_0 E_1(x)$ $(E_1(0) = 1)$, требуется определить распределение тангенциальных контактных напряжений, а также их коэффициент интенсивности на конце стрингера. После перехода к безразмерным координатам и величинам, как в [3], для определения безразмерных тангенциальных контактных напряжений $\tau(\xi)$ получим следующее интегро-дифференциальное уравнение:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\tau(\eta)\,d\eta}{\eta-\xi} = -\lambda^*(\xi)\left[\int_\xi^\infty \tau(\eta)\,d\eta + T_0(\xi)\right] \quad (0<\xi<\infty), \qquad (1.1)$$

которое должно рассматриваться при условии

$$\int_0^\infty \tau(\eta)\,d\eta = 1 - T_0. \qquad (1.2)$$

Здесь

$$T_0(\xi) = \int_\xi^\infty \tau_0(\eta)\,d\eta, \quad T_0 = T_0(0),$$

где $\tau_0(\xi)$ отличается от $\tau_{0s}(x)$ только постоянной, а

$$\lambda^*(\xi) = 1/E_1(x); \qquad (1.3)$$

$$x = E_0 A_s \xi / E_2 d. \qquad (1.4)$$

Отметим, что когда $P=0$, в (1.2) нужно формально положить* $T_0 = 2$.

Решение уравнения (1.1) представим формулой

$$\tau(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\xi}}\int_0^\infty \Phi(\lambda)\cos(\lambda\sqrt{2\xi})\,d\lambda \quad (0<\xi<\infty), \qquad (1.5)$$

где $\Phi(\lambda)$ — неизвестная функция. Так как коэффициент интенсивности напряжений $\tau(\xi)$ величина конечная, то $\lim\limits_{\xi\to 0} \tau(\xi)\sqrt{2\xi} = A < \infty$, откуда вытекает сходимость интеграла от $\Phi(\lambda)$. Из последнего в свою очередь вытекает, что, по крайней мере, $\Phi(\lambda) = 0(\lambda^{-1-\varepsilon})$ $(\varepsilon>0)$ при

* Если $E_s|_{x=0} = 0$, то исходя из физических соображений следует считать $P=0$.

$\lambda\to\infty$. С другой стороны, по формуле обращения косинус-преобразования Фурье из (1.5) при помощи (1.2) обнаружим, что $\Phi(0)=\gamma=2(1-T_0)/\pi$. Далее, из (1.5) при помощи (1.2) получим

$$\varphi(\xi)=-\int_{\xi}^{\infty}\tau(\eta)d\eta=\int_{0}^{\infty}\frac{\Phi(\lambda)-\gamma}{\lambda}\sin(\lambda\sqrt{2\xi})d\lambda \quad (0<\xi<\infty). \quad (1.6)$$

Теперь (1.5) подставим в уравнение (1.1) поменяем порядок интегрирования* и воспользуемся следующим интегральным соотношением:

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\cos(\lambda\sqrt{2\eta})d\eta}{(\eta-\xi)\sqrt{2\eta}}=-\frac{\sin(\lambda\sqrt{2\xi})}{\sqrt{2\xi}} \quad (0<\xi<\infty), \quad (1.7)$$

которое непосредственно вытекает из формулы для преобразования Гильберта косинус-функции [9]. Принимая во внимание (1.6), после некоторых элементарных операций для определения $\Phi(\lambda)$ получаем следующее уравнение:

$$\Phi(\lambda)-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}K(\lambda,\mu)\frac{\gamma-\Phi(\mu)}{\mu}d\mu=f_0(\lambda) \quad (0<\lambda<\infty), \quad (1.8)$$

где

$$K(\lambda,\mu)=\int_{0}^{\infty}u\lambda^*\left(\frac{u^2}{2}\right)\sin\lambda u\sin\mu u\,du;$$

$$\left(\xi=\frac{u^2}{2}\right), \quad (1.9)$$

$$f_0(\lambda)=\int_{0}^{\infty}u\lambda^*\left(\frac{u^2}{2}\right)T_0\left(\frac{u^2}{2}\right)\sin\lambda u\,du$$

причем предполагается, что $\lambda^*(\xi)\to 0$ при $\xi\to\infty$ с необходимой скоростью.

2. Так как потенциальная энергия деформации, накопленная в системе стрингер—основание, величина конечная, то равнодействующая тангенциальных контактных напряжений также величина конечная, что и обеспечивается условием (1.2). Поэтому будем считать, что $\tau(\xi)\in L(0,\infty)$. С другой стороны, хорошо известно [10], что если $f(\xi)\in L(-\infty,\infty)$, то ее преобразование Фурье $F(\lambda)$ на всей оси $-\infty<\lambda<\infty$ равномерно непрерывно и исчезает при $\lambda\to\pm\infty$. Последнее наводит на мысль, что принцип неподвижной точки Банаха для уравнения (1.8) естественно провести в пространстве непрерывных на сомкнутой полуоси $[0,\infty]$ функций $C[0,\infty]$, принимающих на бесконечности конечные значения и наделенных нормой

* Перемену порядка интегрирования можно обосновать так же как в [3].

$$\|\Phi\| = \max_{0\leq\lambda<\infty} |\Phi(\lambda)|.$$

С этой целью во всем дальнейшем будем предполагать:

1) $u^k\lambda^*(u^2/2)\in L(0,\infty)$ $(k=1,\ 2)$ $(\xi=u^2/2)$;

2) функция $u^2\lambda^*(u^2/2)$ на $(0,\infty)$ не возрастает.

Тогда из (1.9) мы вправе написать

$$K(\lambda,\mu)=\frac{1}{2}\left[S(\lambda+\mu)-S(|\lambda-\mu|)\right]\quad(\lambda,\ \mu\geq 0),$$

где

$$S(\lambda)=\int_0^\infty(1-\cos\lambda u)u\lambda^*\left(\frac{u^2}{2}\right)du.$$

По известным результатам М. Г. Крейна ([11,12]) отсюда вытекает, что ядро $K(\lambda,\ \mu)(0\leq\lambda,\ \mu<\infty)$ является положительно определенным ядром. Более того, из предположения 2) и теоремы о синус-интегралах Фурье (([13]), с. 223) следует, что $K(\lambda,\ \mu)\geq 0$ при $\lambda,\ \mu\geq 0$.

Теперь введем в рассмотренное оператор

$$\Psi(\lambda)=K\Phi=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty K(\lambda,\ \mu)\ \frac{\gamma-\Phi(\mu)}{\mu}\,d\mu+f_0(\lambda),$$

действующий в пространстве $C[0,\infty]$. Покажем, что оператор K пространство $C[0,\infty]$ отображает в себя. Действительно, можем записать

$$|\Psi(\lambda+\Delta\lambda)-\Psi(\lambda)|=\frac{1}{\pi}\left|\int_0^\infty[K(\lambda+\Delta\lambda,\ \mu)-K(\lambda,\ \mu)]\,\frac{\gamma-\Phi(\mu)}{\mu}\,d\mu\right|,$$

причем согласно (1.9)

$$H(\lambda,\ \Delta\lambda,\ \mu)=K(\lambda+\Delta\lambda,\ \mu)-K(\lambda,\ \mu)=$$

$$=\int_0^\infty u\lambda^*\left(\frac{u^2}{2}\right)[\sin(\lambda+\Delta\lambda)u-\sin\lambda u]\sin\mu u\,du.$$

Далее фиксируем λ из $(0,\infty)$ и положим

$$H(\lambda,\ \Delta\lambda,\ \mu)\cong C_1(\lambda,\ \Delta\lambda)\omega_1(\mu)\ \text{при}\ \mu\to 0;$$

$$H(\lambda,\ \Delta\lambda,\ \mu)\cong C_2(\lambda,\ \Delta\lambda)\omega_2(\mu)\ \text{при}\ \mu\to\infty.$$

Очевидно, что $\omega_1(\mu)\to 0$ при $\mu\to 0$ и $\omega_2(\mu)\to 0$ при $\mu\to\infty$. С учетом последних формул мы вправе написать

$$\left|\int_0^\infty H(\lambda,\ \Delta\lambda,\ \mu)\,\frac{\gamma-\Phi(\mu)}{\mu}\,d\mu\right|\leq|C_1(\lambda,\ \Delta\lambda)|\int_0^{\varepsilon_0}\frac{|\omega_1(\mu)|}{\mu}|\gamma-\Phi(\mu)|d\mu+$$

$$+\left|\int_{\delta_0}^{A} H(\lambda,\ \Delta\lambda,\ \mu)\,\frac{\gamma-\Phi(\mu)}{\mu}\,d\mu\right|+|C_2(\lambda,\ \Delta\lambda)|\int_{A}^{\infty}\frac{|\omega_2(\mu)|}{\mu}|\gamma-\Phi(\mu)|d\mu,$$

где δ_0—достаточно малое положительное число, а A—достаточно большое положительное число. Эти числа выберем таким образом, чтобы было

$$|C_1(\lambda,\ \Delta\lambda)|\int_{0}^{\delta_0}\frac{|\omega_1(\mu)|}{\mu}|\gamma-\Phi(\mu)|d\mu<\frac{\varepsilon}{3};$$

$$|C_2(\lambda,\ \Delta\lambda)|\int_{A}^{\infty}\frac{|\omega_2(\mu)|}{\mu}|\gamma-\Phi(\mu)|d\mu<\frac{\varepsilon}{3},$$

и зафиксируем их. С другой стороны, легко видеть, что

$$|H(\lambda,\ \Delta\lambda,\ \mu)|\leqslant\frac{1}{2}\,[|h(|\lambda+\Delta\lambda-\mu|)-h(|\lambda-\mu|)|+$$

$$+|h(\lambda+\Delta\lambda+\mu)-h(\lambda+\mu)|],$$

где

$$h(\lambda)=\int_{0}^{\infty}u\lambda^{*}\left(\frac{u^2}{2}\right)\cos\lambda u\,du.$$

Теперь, воспользовавшись свойством равномерной непрерывности преобразования Фурье [10], можно утверждать, что

$$\left|\int_{\delta_0}^{A} H(\lambda,\ \Delta\lambda,\ \mu)\,\frac{\gamma-\Phi(\mu)}{\mu}\,d\mu\right|\leqslant\int_{\delta_0}^{A}|H(\lambda,\ \Delta\lambda,\ \mu)|\,\frac{|\gamma-\Phi(\mu)|}{\mu}\,d\mu<\frac{\varepsilon}{3},$$

если только $|\Delta\lambda|<\delta(\varepsilon)$. Из этих неравенств обнаружим, что $|\Psi(\lambda+$ $+\Delta\lambda)-\Psi(\lambda)|<\varepsilon$, если только $|\Delta\lambda|<\delta(\varepsilon)$. Последнее доказывает требуемое.

Приступив к выяснению условия сжатия оператора K, можем записать

$$|\Psi_1(\lambda)-\Psi_2(\lambda)|\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}K(\lambda,\ \mu)\,\frac{|\Phi_1(\mu)-\Phi_2(\mu)|}{\mu}\,d\mu.$$

Отсюда

$$\|\Psi_1-\Psi_2\|\leqslant\sup_{0\leqslant\lambda<\infty}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{K(\lambda,\ \mu)}{\mu}\,d\mu\|\Phi_1-\Phi_2\|.$$

Следовательно, при условии

$$\sup_{0\leqslant\lambda<\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{K(\lambda,\mu)}{\mu}\,d\mu<1 \tag{2.1}$$

оператор K сжимающий. Для упрощения условия (2.1) положим

$$G(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{K(\lambda,\mu)}{\mu}\,d\mu=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{d\mu}{\mu}\int_0^\infty u\lambda^*\left(\frac{u^2}{2}\right)\sin\lambda u\sin\mu u\,du.$$

Меняя порядок интегрирования, что легко обосновать, получаем

$$G(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty u\lambda^*\left(\frac{u^2}{2}\right)\sin\lambda u\,du\int_0^\infty\frac{\sin\mu u}{\mu}\,d\mu=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty u\lambda^*\left(\frac{u^2}{2}\right)\sin\lambda u\,du\leqslant\frac{1}{2}\int_0^\infty u\lambda^*\left(\frac{u^2}{2}\right)du,$$

откуда видно, что при условии

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty u\lambda^*\left(\frac{u^2}{2}\right)du<1 \tag{2.2}$$

оператор K сжимающий.

Таким образом, при условии (2.2) согласно принципу неподвижной точки Банаха ([14]) решение уравнения (1.8) в $C[0,\infty]$ можно построить методом последовательных приближений.

После того как найдена функция $\Phi(\lambda)$, коэффициент интенсивности тангенциальных контактных напряжений A_0 определяется следующей формулой:

$$A_0=\lim_{\xi\to+0}\tau(\xi)\sqrt{\xi}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\infty\Phi(\lambda)d\lambda.$$

Следует отметить, что если, в частности, положить

$$u\lambda^*(u^2/2)=e^{-\beta u}\quad(\beta>0),$$

то в законности указанной перемены порядка интегрирования можно убедиться непосредственным вычислением, причем

$$G(\lambda)=\frac{\lambda}{2(\beta^2+\lambda^2)}.$$

Условие же (2.2) в данном случае даст $\beta>1/2$. С другой стороны, любую функцию $\lambda^*\left(\dfrac{u^2}{2}\right)$ из достаточно общего класса можно представить рядом Дирихле ([15,16])

$$u\lambda^*(u^2/2)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n u},$$

где последовательность $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ — положительная и возрастающая. Положив

$$u\lambda^*(u^2/2)\approx\sum_{n=1}^{N} a_n e^{-\lambda_n u},$$

можно провести метод последовательных приближений в случае такой функции неоднородности.

В заключение заметим, что если $\lambda^*(\xi)=1/\sqrt{2\xi}$, то при помощи (1.9)

$$K(\lambda,\ \mu)=\int_0^{\infty}\sin\lambda u\sin\mu u\,du=\frac{\pi}{2}\delta(\lambda-\mu),$$

где $\delta(\lambda)$ — дельта-функция Дирака, и, следовательно, уравнение (1.8) допускает замкнутое решение в виде

$$\Phi(\lambda)=\frac{2\lambda f_0(\lambda)-\gamma}{1+2\lambda}.$$

Институт механики Академии наук
Армянской ССР

Ս. Մ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ

Առաձգական կիսահարթության կամ հարթության և կիսաանվերջ անհամասեռ վերդրակի միջև կոնտակտային փոխազդեցության խնդրի շուրջը

Դիտարկվում է բարակ անհամասեռ կիսանվերջ վերդրակից, որի առաձգականության մոդուլը ըստ երկարության փոփոխվում է բավականին ընդհանուր տեսքի ֆունկցիայով, առաձգական կիսահարթությանը կամ հարթությանը ուժի փոխանցման վերաբերյալ կոնտակտային խնդիրը։ Խնդրի որոշիչ ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարման լուծումը ներկայացվում է Ֆուրեյի կոսինուս-ինտեգրալով, որը բացահայտորեն պարունակում է վերդրակի ծայրակետում շոշափող կոնտակտային լարումների համար բնորոշ եզակիությունը։ Ձևափոխված որոշիչ հավասարումը հետազոտվում է Բանախի անշարժ կետի սկզբունքի օգնությամբ։ Դիտարկվում է մասնավոր դեպք, երբ վերդրակի առաձգականության մոդուլը փոփոխվում է ցուցչային ֆունկցիայի օրենքով։ Մյուս մասնավոր դեպքում, երբ առաձգականության մոդուլը փոփոխվում է քառակուսի արմատի օրենքով, կառուցվում է խնդրի փակ լուծումը։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *E. Melan*, Ingr. Arch., vol. 3, № 2 (1932). [2] *E. L. Buell*, J. Math. and Phus., vol. 26 (1948). [3] *W. T. Kotter*, Quart. J. Mech. and Appl. Math., vol. 8, № 2 (1955). [4] *E. H. Brown*, Proc. Roy. Soc. Ser. A, vol. 239, № 1218 (1957). [5] *A. M. Hens*, Technische Hogeschool. Delft (1957). [6] *А. И Каландия*, ПММ, т. 33, вып. 3 (1969) [7] *В. Л. Воробьев, Г. Я. Попов*, ПММ, т. 34, вып 2 (1970). [8] *Н. Х. Арутюнян, С. М. Мхитарян*, в сб.: Механика деформируемых тел и конструкций, Машиностроение, М., 1975. [9] Таблицы интегральных преобразований, СМБ, т. II, Наука, М., 1970. [10] *Н. Винер*, Интеграл Фурье и некоторые его приложения, Физматгиз, М., 1963. [11] *М. Г. Крейн*, ДАН СССР, т. 53 (1946). [12] *М. Г. Крейн*, ДАН СССР, т. 88 (1953). [13] *Е. Титчмарш*, Введение в теорию интегралов Фурье. Гостехиздат, М.—Л., 1948. [14] *А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин*, Элементы теории функций и функционального анализа, Наука, М., 1972. [15] *Е. Титчмарш*, Теория функций, Наука, М., 1980. [16] *А. Ф. Леонтьев*, Ряды экспонент, Наука, М., 1976.