ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXIII 1981 4

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

Г. Г. Геворкян

О множествах единственности для интегралов Фурье

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 25/VI 1981)

В настоящей работе для интегралов Фурье доказывается существование множеств единственности меры нуль.

Определение 1. Множество $E\subset(-\infty,+\infty)$ назовем множеством единственности для интегралов Фурье, если из условий $f(x)=0$ при $x\in E$ и $\hat{f}(x)\in L_p(-\infty,+\infty)$* для некоторого $p<2$ следует, что $f(x)=0$ почти всюду на $(-\infty,+\infty)$.

В ([1]) доказана (см. ([1]), теорема 3)

Теорема 1. *Для любого $\varepsilon>0$ существует множество единственности для интегралов Фурье, мера которого меньше ε.*

В настоящей работе доказывается следующая

Теорема 2. *Существует множество E, $\mu E=0$, такое, что если для некоторой функции $f(x)\in L_2(-\infty,+\infty)$*

1°) $\hat{f}(x)\in L_p(-\infty,+\infty)$ для некоторого $p<2$,

*2°) $f_N(x)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\dfrac{4\sin^2\frac{N(x-t)}{2}}{(x-t)^2N}\,dt$ сходится к нулю при $N\to\infty$ для $x\in E$**,*

то $f(x)=0$ почти всюду на $(-\infty,+\infty)$.

Для доказательства теоремы 2 нам нужно несколько вспомогательных лемм.

---

* Рассматривается преобразование Фурье в классе $L_2(-\infty,+\infty)$, т. е.

$$f(x)\in L_2(-\infty,+\infty) \text{ и } \hat{f}(x)=\underset{a\to+\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a} f(t)e^{-itx}dt\in L_2(-\infty,+\infty).$$

** Вообще $\lim\limits_{N\to\infty} f_N(x)=f(x)$ п. в. на $(-\infty,+\infty)$.

Лемма 1. *Пусть* $f(x)\in L_2(-\infty,+\infty)$ *и* $f_\sigma(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)\times$

$\times\dfrac{4\sin^2\frac{\sigma(x-t)}{2}}{(x-t)^2\sigma}\,dt$, $0<\sigma<+\infty$, *суммы Фейера ее интеграла Фурье. Если* $\lambda(x)$ *непрерывно дифференцируемая ограниченная функция, то*

$$\frac{\lambda(x)}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,\frac{4\sin^2\frac{\sigma(x-t)}{2}}{(x-t)^2\sigma}\,dt-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\lambda(t)\,\frac{4\sin^2\frac{\sigma(x-t)}{2}}{(x-t)^2\sigma}\,dt\to$$

$$\to 0 \text{ при } \sigma\to+\infty. \tag{1}$$

Доказательство. Интеграл

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[f(t)\lambda(x)-f(t)\lambda(t)]\,\frac{4\sin^2\frac{\sigma(x-t)}{2}}{(x-t)^2\sigma}\,dt$$

разобьем на две части

$$\frac{1}{2\pi}\Bigg(\int\limits_{|x-t|\geqslant\sigma^{-\frac{3}{5}}}+\int\limits_{|x-t|<\sigma^{-\frac{3}{5}}}\Bigg)[f(t)\lambda(t)-f(t)\lambda(x)]\,\frac{4\sin^2\frac{\sigma(x-t)}{2}}{(x-t)^2\sigma}\,dt=I_1+I_2$$

$$|I_1|\leqslant\Bigg\{\int\limits_{|x-t|\geqslant\sigma^{-\frac{3}{5}}}[f(t)\lambda(x)-f(t)\lambda(t)]^2dt\Bigg\}^{\frac{1}{2}}\Bigg\{\sigma\int\limits_{|t|>\sigma^{\frac{2}{5}}}\frac{16\sin^4\frac{t}{2}}{t^4}\,dt\Bigg\}^{\frac{1}{2}}\leqslant \tag{2}$$

$$\leqslant 2\sup_x|\lambda(x)|\cdot\|f\|_2\Bigg\{\sigma\int\limits_{|t|>\sigma^{\frac{2}{5}}}\frac{16dt}{t^4}\Bigg\}^{\frac{1}{2}}<M^1[\sigma\cdot\sigma^{-\frac{6}{5}}]^{\frac{1}{2}}\to 0$$

Из непрерывной дифференцируемости $\lambda(t)$ следует, что для любого x и для достаточно больших σ (зависящих от x)

$$|\lambda(x)-\lambda(t)|<\alpha_x|x-t|,\ \text{при}\ |x-t|<\sigma^{-\frac{3}{5}}, \tag{3}$$

где α_x некоторое число, зависящее от x.

Поэтому

$$|I_2|<\Bigg\{\int\limits_{|x-t|<\sigma^{-\frac{3}{5}}}f^2(t)[\lambda(x)-\lambda(t)]^2dt\Bigg\}^{\frac{1}{2}}\Bigg\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{16\sin^4\frac{\sigma(x-t)}{2}}{(x-t)^4\sigma^2}\,dt\Bigg\}^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant\Bigg\{\|f\|_2^2\cdot\alpha_x\sigma^{-\frac{6}{5}}\Bigg\}^{\frac{1}{2}}\Bigg\{\sigma\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{16\sin^4\frac{t}{2}}{t^4}\,dt\Bigg\}^{\frac{1}{2}}\to 0 \text{ при } \sigma\to+\infty.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Для любых* $\varepsilon>0$, $q>2$, $(a, b)\subset(-\infty,+\infty)$ *и любого* $\alpha>0$ *существует монотонная непрерывная функция* $g(x)$ *такая, что:*

1°) $g'(x)=0$ *при* $x\notin\overline{E}$, *где* E *объединение конечного числа интервалов, лежащих в* (a, b) *и* $\mu E=\varepsilon(b-a)$,

2°) $g'(x)=\frac{\alpha}{\varepsilon}$ *при* $x\in E$,

3°) $g(x)=0$ *при* $x\leqslant a$ *и* $g(x)=\alpha(b-a)$ *при* $x\geqslant b$,

4°) $\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_a^b e^{itx}d[g(x)-\alpha x]\right|^q dt\right\}^{\frac{1}{q}}<\varepsilon.$

Фактически эта лемма доказана в (¹) (см. (¹), лемма 2).

Лемма 3. *Для любых* $\varepsilon>0$, $q>2$ *и* $(a, b)\subset(-\infty,+\infty)$ *существует монотонная сингулярная функция* $f(x)$ *такая, что:*

1°) $f(x)=0$ при $x\leqslant a$ и $f(x)=b-a$ при $x\geqslant b$,

2°) $\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_a^b e^{itx}d[f(x)-x]\right|^q dt\right\}^{\frac{1}{q}}<\varepsilon.$

Доказательство. Возьмем $\varepsilon_i>0$ такие, что $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\varepsilon_i<\varepsilon$. Из леммы 2 следует существование такой монотонной непрерывной функции $f_1(x)$, что:

1) $f_1'(x)=0$ при $x\notin\overline{E_1}$, где E_1 объединение конечного числа интервалов, лежащих в (a, b) и $\mu E_1=\varepsilon_1(b-a)$,

2) $f_1'(x)=\frac{1}{\varepsilon_1}$ при $x\in E_1$,

3) $f_1(x)=0$ при $x\leqslant a$ и $f_1(x)=b-a$ при $x\geqslant b$,

4) $\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_a^b e^{itx}d[f_1(x)-x]\right|^q dt\right\}^{\frac{1}{q}}<\varepsilon_1.$

Пусть E_1^j, $j=1, 2, \ldots, \nu_1$ составляющие интервалы E_1, т. е. $E_1=\bigcup\limits_{j=1}^{\nu_1}E_1^j$ и $E_1^{j_1}\cap E_1^{j_2}=\varnothing$ при $j_1\neq j_2$. Функция $f_1(x)$ на E_1^j равна $\frac{1}{\varepsilon_1}$. Применяя лемму 2 для $\varepsilon=\frac{\varepsilon_2}{\nu_1}$, $\alpha=\frac{1}{\varepsilon_1}$ и интервалов $E_1^j=(a_j^1, b_j^1)$, получим монотонные непрерывные функции $f_2^j(x)$ такие, что:

5) $f_2^{j\prime}(x)=0$ при $x\notin\overline{E_2^j}$, где E_2^j объединение конечного числа интервалов, лежащих в E_1^j и $\mu E_2^j=\frac{\varepsilon_2}{\nu_1}\mu E_1^j$,

6) $f_2^j(x)=\frac{\nu_1}{\varepsilon_1\varepsilon_2}$ при $x\in E_2^j$,

7) $f_2^j(x)=0$ при $x\leqslant a_j$ и $f_2^j(x)=\frac{1}{\varepsilon_1}(b_j^1-a_j^1)$ при $x\geqslant b_j$,

8) $\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{a_j}^{b_j}e^{itx}d[f_2^j(x)-f_1(x)]\right|^q dt\right\}^{\frac{1}{q}}<\frac{\varepsilon_2}{\nu_1}$.

Обозначим $f_2(x)=\sum\limits_{j=1}^{\nu_1}f_2^j(x)$ и $E_2=\bigcup\limits_{j=1}^{\nu_1}E_2^j$. Из 1), 5) и 4), 8) имеем

$$\mu E_2=\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\nu_1}(b-a) \tag{4}$$

и

$$\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{a}^{b}e^{itx}d[f_2(x)-x]\right|^q dt\right\}^{\frac{1}{q}}<\varepsilon_1+\varepsilon_2. \tag{5}$$

Причем

$$f_1(x)=f_2(x) \text{ при } x\notin E_1. \tag{6}$$

Продолжая этот процесс, получим последовательности монотонных непрерывных функций $f_n(x)$ и множеств E_n, которые удовлетворяют следующим условиям:

A) E_n—объединение конечного числа интервалов, лежащих в E_{n-1} и $\mu E_n=\frac{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n}{\nu_1\ldots\nu_{n-1}}(b-a)$,

B) $f_n(x)=0$ при $x\leqslant a$ и $f_n(x)=b-a$ при $x\geqslant b$,

C) $f_n'(x)=0$ при $x\notin \overline{E}_n$, $f_n(x)=f_{n+1}(x)$ при $x\notin E_n$,

D) $f_n(x)$ равномерно сходится к некоторой непрерывной функции $f(x)$,

E) $\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{a}^{b}e^{itx}d[f_n(x)-x]\right|^q dt\right\}^{\frac{1}{q}}<\sum\limits_{i=1}^{n}\varepsilon_i$.

Из A)—D) следует, что предельная функция $f(x)$ сингулярная. Из D) и E) по теореме Хелли (см. ([2]), с. 254) следует, что

$$\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{a}^{b}e^{itx}d[f(x)-x]\right|^q dt\right\}^{\frac{1}{q}}<\varepsilon.$$

Лемма доказана.

Лемма 4. *Существует множество* E, $\mu E=0$, *такое, что если преобразование Фурье ограниченной функции* $f(x)\in L_2(-\infty,+\infty)$ *принадлежит классу* $L_p(-\infty,+\infty)$ *для некоторого* $p<2$ *и интегралы* $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{4\sin^2\frac{N(x-t)}{2}}{(x-t)^2N}dt$ *сходятся к нулю при* $N\to\infty$ *для* $x\in E$, *то* $f(x)=0$ *п. в. на* $(-\infty,+\infty)$.

Доказательство. Пусть $q_m\downarrow 2$, $\varepsilon_m^n>0$, $\sum\limits_{m,n}\varepsilon_m^n<+\infty$ и $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность интервалов с рациональными концами. Тогда существуют сингулярные функции $f_m^n(x)$ такие, что

$$\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{I_n}e^{itx}d[f_m^n(x)-x]\right|^{q_m}dt\right\}^{\frac{1}{q_m}}<\varepsilon_m^n.$$

Обозначим через E объединение носителей мер $df_m^n(x)$. Покажем, что E—требуемое множество. Допустим, что $f(x)$ отлична от нуля. Тогда существуют интервал I_n и число $a>0$ такие, что для достаточно больших N

$$\beta=\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{I_n}dt\int\limits_{-N}^{N}\left(1-\frac{|u|}{N}\right)e^{itx}\hat{f}(u)du\right|>a^*. \qquad (7)$$

Пусть $\frac{1}{p_n}+\frac{1}{q_n}=1$. Тогда

$$\beta=\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-N}^{N}\left(1-\frac{|u|}{N}\right)\hat{f}(u)\left\{\int\limits_{I_n}e^{ixu}dx\right\}du\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-N}^{N}\left(1-\frac{|u|}{N}\right)\hat{f}(u)\left\{\int\limits_{I_n}e^{ixu}d[f_m^n(x)-x]\right\}du\right|+$$

$$+\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{I_n}df_m^n(x)\int\limits_{-N}^{N}\left(1-\frac{|u|}{N}\right)\hat{f}(u)e^{ixu}du\right|\leqslant$$

$$\leqslant\|\hat{f}\|_{p_m}\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{I_n}e^{ixu}d[f_m^n(x)-x]\right|^{q_m}du\right\}^{\frac{1}{q_m}}+$$

---

* Интеграл $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-N}^{N}\left(1-\frac{|u|}{N}\right)e^{iux}\hat{f}(u)du$ по метрике $L_2(-\infty,+\infty)$ сходится к $f(x)$ при $N\to\infty$.

$$+\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{I_n} df_m^n(x)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\frac{4\sin^2\frac{N(x-t)}{2}}{(x-t)^2N}\,dt\right|.$$

Выбирая m достаточно большим, первое слагаемое можно сделать меньше $a/2$. После чего, так как интегралы

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\frac{4\sin^2\frac{N(x-t)}{2}}{(x-t)^2N}\,dt$$

ограничены и стремятся к нулю при $N\to\infty$ на носителе меры $df_m^n(x)$, можно выбрать N таким, чтобы второе слагаемое тоже было меньше $a/2$. Но это противоречит (7). Полученное противоречие доказывает лемму.

Доказательство теоремы 2. Пусть E_n, $n=1, 2, \ldots$ открытые множества, удовлетворяющие требованиям теоремы 1, и $\mu E_n<\frac{1}{n}$, а E_0 множество, удовлетворяющее требованиям леммы 4, $\mu E_0=0$. Покажем, что множество $E=\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n\right)\cap E_0$ удовлетворяет требованиям теоремы 2. Пусть для некоторой функции $f(x)\in L_2(-\infty,+\infty)$

$$\hat{f}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \underset{a\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int\limits_{-a}^{a} f(t)e^{-itx}dt\in L_p(-\infty,+\infty),\ p<2, \tag{8}$$

$$f_N(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\frac{4\sin^2\frac{N(x-t)}{2}}{(x-t)^2N}\,dt\to 0,\ \text{при } N\to\infty \text{ и } x\in E. \tag{9}$$

Обозначим

$$G=\{x:\limsup_{N\to\infty}|f_N(x)|\geqslant 1\}. \tag{10}$$

Если $G=\varnothing$, то $f(x)$ ограничена и по лемме 4 $f(x)=0$ п. в. на $(-\infty,+\infty)$. Допустим $G\neq\varnothing$. Тогда G—множество типа G_δ и $G\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n^c$. Существуют интервал I и номер m такие, что (см. ([3]), с. 548, лемма 6.17)

$$\varnothing\neq G\cap I\subset I\cap E_n^c. \tag{11}$$

Возьмем произвольный интервал J, лежащий в I и не пересекающийся с E_n^c. Пусть $\lambda(x)$ бесконечно дифференцируемая функция с носителем J. Легко видеть, что преобразование Фурье произведения $f(x)\lambda(x)$ принадлежит классу $L_p(-\infty, +\infty)$. Функция $f(x)\lambda(x)$ ограничена и по лемме 1

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\lambda(t)\,\frac{4\sin^2\frac{N(x-t)}{2}}{(x-t)^2 N}\,dt \to 0 \text{ при } N\to\infty \text{ и } x\in E_0. \tag{12}$$

Из леммы 4 следует, что $f(x)\lambda(x)$ п. в. на $(-\infty, +\infty)$. Следовательно, $f(x)$ п. в. нуль на J. Из выбора J следует, что $f(x)=0$ п. в. на $I\bigcap E_n$. Пусть $\varphi(x)$ бесконечно дифференцируемая функция с носителем I. Легко видеть, что преобразование Фурье функции $f(x)\varphi(x)$ принадлежит классу $L_p(-\infty, +\infty)$. Но $f(x)\varphi(x)=0$ п. в. на E_n, следовательно, по теореме 1 $f(x)\varphi(x)=0$ п. в. на $(-\infty, +\infty)$. Поэтому $f(x)=0$ п. в. на I. Но это противоречит тому, что $G\bigcap I\neq\varnothing$ (см. (11)). Теорема доказана.

Замечание. Теорема 2 допускает формулировку в эквивалентной форме.

Теорема 3. *Существует множество E, $\mu E=0$, такое, что если $f(x)\in L_2(-\infty, +\infty)\bigcap L_p(-\infty, +\infty)$ для некоторого $p<2$ и*

$$f_\sigma(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sigma}^{\sigma}\left(1-\frac{|u|}{\sigma}\right)f(u)e^{iux}du\to 0 \text{ при } \sigma\to\infty,$$

то $f(x)=0$ почти всюду.

Из теоремы 3 следует

Теорема 4. *Существует множество E, $\mu E=0$, такое, что если для некоторой функции $f(x)\in L_2(-\infty, +\infty)$*

1°) $\hat{f}(x)\in L_p(-\infty, +\infty)$ *для некоторого* $p<2$,

2°) $f_\sigma(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\sigma}^{\sigma}\hat{f}(u)e^{iux}du\to 0$ *при* $\sigma\to\infty$,

то $f(x)=0$ почти всюду на $(-\infty, +\infty)$.

Теорема 4 является аналогом теоремы Мичела и Сорди (см. [4]).

Теорема 5 (*Мичел, Сорди*). *Существует множество E, $\mu E=0$, такое, что если $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|a_n|^p<+\infty$ для некоторого $p<2$ и $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n e^{int}=0$ для $t\in E$, то $a_n=0$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$*

В заключение выражаю благодарность чл.-корр. АН Арм. ССР А. А. Талаляну, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Ереванский государственный университет

Ֆուրյեի ինտեգրալների համար միակության բազմությունների մասին

Աշխատանքում ապացուցված է.

Թեորեմ 2. Գոյություն ունի E բազմություն, $\mu E=0$, այնպիսին, որ երբ որևէ $f(x)\in L_2(-\infty,+\infty)$ ֆունկցիայի համար

$$1^\circ)\ \hat{f}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \underset{\sigma\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_{-\sigma}^{\sigma} e^{-itx}f(t)dt\in L_p\ (-\infty,+\infty) \quad \text{որևէ} \quad p<2$$

համար

$$2^\circ)\ f_N(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\frac{4\sin^2\frac{N(x-t)}{2}}{(x-t)^2N}\,dt\to 0, \text{ երբ } x\in E \text{ և } N\to\infty,$$

ապա՝ $(-\infty,+\infty)$-ի վրա համարյա ամենուրեք $f(x)=0$:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Г. Г. Геворкян*, ДАН АрмССР, т. 72, № 4 (1981). [2] *Натансон И. П.*, Теория функций вещественной переменной, Гос. изд-во техн.-теор. лит., М., 1957. [3] *А. Зигмунд*. Тригонометрические ряды, т. I. ИЛ, М., 1965. [4] *L. Michele, P. M. Soardi*, Bolletino U. M. I (4), 11 (1975).