ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXIII 1981 3

УДК 517.946

МАТЕМАТИКА

Ф. О. Мамиконян

Об оценках решений некоторых многомерных интегральных неравенств

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 23/IV 1981)

1. Основные результаты. Пусть $R_+^n \equiv \{x=(x_1, \ldots, x_n) \in R^n;\ x_i \geqslant 0,\ i=1, 2, \ldots, n\}$ и $R_+^{m,n} \equiv \{(\xi_m; x_n) \equiv (\xi_1, \ldots, \xi_m; x_1 \ldots x_n) \in R^{m+n};\ \xi_i \geqslant 0,\ i=1, \ldots, m;\ x_p \geqslant 0,\ p=1, \ldots, n\}$. Обозначим $Q^{m,n} \equiv \{(\xi_m; x_n) \in R_+^{m,n};\ m \leqslant n;\ \xi_i \leqslant x_i, i=1, 2, \ldots, m\}$.

Пусть, далее, k—некоторое удовлетворяющее условию $1 \leqslant k \leqslant n$ натуральное число. Обозначим $(t_k, x_n) \equiv (t_1, \ldots, t_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$, $(\xi_m; t_k, x_n) \equiv (\xi_1, \ldots, \xi_m; t_1 \ldots t_k, x_{k+1} \ldots x_n)$ и $x_{l,j} \equiv (x_l, x_{l+1}, \ldots, x_j)$, $(t_{l,j}; x_{k,e}) \equiv (t_l, t_{l+1}, \ldots, t_j; x_k, x_{k+1}, \ldots, x_e)$.

В классе определенных в R_+^n и локально интегрируемых с квадратом в R_+^k функций рассматривается интегральное неравенство типа Гронуолла

$$u(x) \leqslant f(x) + g(x) \int_0^{x_1} \ldots \int_0^{x_k} a(t_k, x_n) u(t_k, x_n) dt_1 \ldots dt_k \tag{1.1}$$

почти всюду в R_+^n, где $1 \leqslant k \leqslant n$, а $f(x)$, $g(x)$ и $a(x)$—некоторые определенные в R_+^n и локально интегрируемые с квадратом в R_+^k функции.

При изучении неравенств подобного рода важную роль играет следующая

Лемма 1. *Пусть $f(x)$, $g(x)$ и $a(x)$ — некоторые определенные в R_+^n и локально интегрируемые с квадратом в R_+^k функции. Пусть, кроме того, функции $g(x)$ и $a(x)$ неотрицательны всюду в R_+^n.*

Тогда для любой удовлетворяющей неравенству (1.1) функции $u(x)$ имеет место неулучшаемая оценка

$$u(x) \leqslant f(x) + g(x) \int\limits_0^{x_1} \ldots \int\limits_0^{x_k} a(t_k, x_n) f(t_k, x_n) R(t_k; x_n) dt_1 \ldots dt_k, \qquad (1.2)$$

где $R(t_k; x_n)$ — решение интегрального уравнения

$$R(t_k; x_n) = 1 + \int\limits_{t_1}^{x_1} \ldots \int\limits_{t_k}^{x_k} a(s_k, x_n) g(s_k, x_n) R(t_k; s_k, x_n) ds_1 \ldots ds_k. \qquad (1.3)$$

Таким образом, задача сводится к нахождению или оценке решения интегрального уравнения (1.3). С точки зрения приложений наиболее интересны оценки, выражающиеся через функции, поведение которых хорошо изучено. Ниже приводятся некоторые результаты в этом направлении.

Теорема 1. *Пусть выполнены все условия леммы 1 и, кроме того, функция $f(x)$ неотрицательна всюду в R^n_+.*

Тогда для любой удовлетворяющей неравенству (1.1) функции $u(x)$ имеет место оценка

$$u(x) \leqslant f(x) + g(x) \int\limits_0^{x_1} \ldots \int\limits_0^{x_k} a(t_k, x_n) f(t_k x_n) \exp \alpha(t_k; x_n) dt_1 \ldots dt_k, \qquad (1.4)$$

где

$$\alpha(t_k; x_n) \equiv \int\limits_{t_1}^{x_1} \ldots \int\limits_{t_k}^{x_k} a(s_k, x_n) g(s_k, x_n)\, ds_1 \ldots ds_k. \qquad (1.5)$$

Отметим, что если $f(x) \equiv 0$, неравенство (1.1) влечет за собой $u(x) \leqslant 0$.

Для дальнейшего нам понадобится

Определение. Пусть $1 \leqslant p \leqslant n$. В множестве p-мерных векторов $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ введем частичное упорядочение: $(x_1, \ldots, x_p) \leqslant (y_1, \ldots, y_p)$ эквивалентно $x_s \leqslant y_s$, $s = 1, 2 \ldots p$. В дальнейшем всегда подразумевается именно это покомпонентное частичное упорядочение.

Определенную в R^n_+ функцию $v(x)$ назовем неубывающей относительно вектора $(x_1 \ldots x_p)$, если из того, что $(x_1, \ldots, x_p) \leqslant (y_1, \ldots, y_p)$, следует $v(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots x_n) \leqslant v(y_1, \ldots, y_p, x_{p+1}, \ldots, x_n)$.

Аналогично можно ввести понятие функции, неубывающей относительно произвольного вектора $(x_{l_1}, \ldots, x_{l_m})$.

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия теоремы 1 и, кроме того, функции $f(x)$ и $g(x)$ не убывают относительно вектора $(x_1, \ldots, x_k)$.*

Тогда для любой удовлетворяющей неравенству (1.1) *функции* $u(x)$ *имеет место оценка*

$$u(x) \leqslant f(x) +$$

$$+ g(x) \int_0^{x_1} \ldots \int_0^{x_k} a(t_k, x_n) f(t_k, x_n) \exp\{g(t_k, x_n) \alpha(0; t_k, x_n) dt_1 \ldots dt_k\}, \quad (1.6)$$

где функция $\alpha(0; x_n)$ *определяется выражением* (1.5).

Следствие 1. В предположениях теоремы 2 для любой удовлетворяющей неравенству (1.1) функции $u(x)$ имеет место оценка

$$u(x) \leqslant f(x) \cdot \exp\{g(x) \cdot \alpha(0; x_n)\}, \quad (1.7)$$

где функция $\alpha(0; x_n)$ определяется выражением (1.5).

Приведенные здесь оценки выражены через экспоненциальную функцию. Оказывается, что для некоторых частных классов функций $a(x)$ и $g(x)$ эти оценки можно уточнить.

Определение. Пусть $1 \leqslant m \leqslant n$. Определенную в R^n_+ функцию $z(x)$ назовем мультипликативной функцией степени m, если существует последовательность натуральных чисел $p_0, p_1, \ldots, p_m$ такая, что $1 = p_0 \leqslant p_1 \leqslant p_2 \leqslant \ldots \leqslant p_{m-1} \leqslant p_m = n$ и

$$z(x) = \prod_{i=1}^{m} z_i(x_{p_{i-1}, p_i}). \quad (1.8)$$

Естественно считать, что если функция $z(x)$ локально интегрируема с квадратом в R^k_+ и неотрицательна в R^n_+, эти свойства соответственно наследуются функциями z_i $(i = 1, 2 \ldots m)$.

Прежде чем сформулировать соответствующий результат, обозначим

$$\alpha(t_{p_1, p_2}; x_{p_1, p_2}; z) \equiv \int_{t_{p_1}}^{x_{p_1}} \ldots \int_{t_{p_2}}^{x_{p_2}} z(\xi_1, \ldots \xi_t, x_{p_2+1}, \ldots, x_{p_3}) d\xi_1 \ldots d\xi_t \quad (1.9)$$

для произвольной локально суммируемой в R^t_+ $(t = p_2 - p_1)$ функции $z(x_{p_1, p_3})$ и любых натуральных чисел p_1, p_2, p_3 таких, что $p_1 \leqslant p_2 \leqslant p_3$.

Обозначим также

$$I_m(\tau) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau^k}{(k!)^m} \quad (1,10)$$

для произвольного натурального числа m. Очевидно, что $I_m(\tau)$ является целой функцией переменной τ.

Имеет место

Теорема 3. *Пусть выполнены все условия теоремы 1 и, кроме того, $a(x)\cdot g(x)$ является мультипликативной функцией некоторой степени m.*

Тогда для любой удовлетворяющей неравенству (1.1) функции $u(x)$ имеет место оценка

$$u(x)\leqslant f(x)+g(x)\int_0^{x_1}\dots\int_0^{x_n}a(s)f(s)I_m\{\tau(s_n;x_n;z_1\dots z_m)\}ds_1\dots ds_n \tag{1.11}$$

при $k=n$ и

$$u(x)\leqslant f(x)+g(x)\int_0^{x_1}\dots\int_0^{x_k}a(s_kx_n)f(s_k,x_n)I_r\{\mu(s_k;x_n;z_1\dots z_m)\}ds_1\dots ds_k \tag{1.12}$$

при $k<n$; причем $I_l(\xi)$ определяется выражением (1.10), r — натуральное число такое, что $p_{r-1}\leqslant k\leqslant p_r$,

$$\tau(s_n;x_n;z\dots z_m)\equiv\prod_{l=1}^{m}\alpha_i(s_{p_{l-1},p_l};x_{p_{l-1},p_l};z_l), \tag{1.13}$$

$$\mu(s_k;x_n;z_1,\dots,z_m)\equiv$$

$$\equiv\prod_{l=1}^{r-1}\alpha_i(s_{p_{l-1},p_i};x_{p_{l-1},p_i};z_l)\alpha_r(s_{p_{r-1},k};x_{p_{r-1},p_r};z_r)\prod_{l=r}^{m-1}z_{l+1}x_{p_l+1,p_{l+1}} \tag{1.14}$$

и, наконец, каждая α_l определяется соответствующим выражением (1.9).

При этом, если $k=n=m$ или $k<n$ и

$$a(x)\cdot g(x)=\prod_{i=1}^{k}z_i(x_i)\cdot z_{k+1}(x_{k+1,n}) \tag{1.15}$$

то оценка (1.11) (и соответственно (1.12)) является неулучшаемой.

Заметим, что при $m=1$ утверждение теоремы 3 сводится к утверждению теоремы 1. Отметим также, что если функция $a(x)\cdot g(x)$ не зависит явным образом от некоторых переменных $x_{i_1},\dots x_{i_p}$ ($i_s\leqslant k$, $s=1,\dots p$), она является мультипликативной функцией степени выше 1 и к решению интегрального неравенства (1.1) применимы более точные оценки (1.11) и (1.12).

Аналогичным образом может быть обобщено утверждение теоремы 2.

Теорема 4. *Пусть выполнены все условия теоремы 1 и, кроме того, $f(x)$ и $g(x)$ не убывают относительно вектора $(x_1,\dots x_k)$, а $a(x)$ — мультипликативная функция некоторой степени m, т. е.*

$$a(x)=\prod_{i=1}^{m} a_i(x_{p_{i-1},p_i}). \tag{1.16}$$

Тогда в обозначениях теоремы 3 для любой удовлетворяющей неравенству (1.1) *функции* $u(x)$ *имеет место оценка*

$$u(x)\leqslant f(x)+g(x)\int_0^{x_1}\ldots\int_0^{x_k} a(s)\,f(s)I_m\{g(s)\tau(0;\,s_n;\,a_1\,\ldots\,a_m)\}ds_1\,\ldots\,ds_n \tag{1.17}$$

при $k=n$ *и*

$$u(x)\leqslant f(x)+g(x)\int_0^{x_1}\ldots\int_0^{x_k} a(s_k,x_n)f(s_k,x_n)I_r\{g(s_k,x_n)\mu(0;s_k,x_n;a_1\ldots a_m)\}ds_1\ldots ds_k \tag{1.18}$$

при $k<n$.

С л е д с т в и е 2. В предположениях и обозначениях теоремы 4 для любой удовлетворяющей неравенству (1.1) функции $u(x)$ имеет место оценка

$$u(x)\leqslant f(x)\cdot I_m\{g(x)\cdot\tau(0;\,x_n;\,a_1\,\ldots\,a_m)\} \tag{1.19}$$

при $k=n$ и

$$u(x)\leqslant f(x)\cdot I_r\{g(x)\cdot\mu(0;\,x_n;\,a_1\,\ldots\,a_m)\} \tag{1.20}$$

при $k<n$.

Заметим, что все результаты настоящей работы можно распространить на интегральные неравенства

$$u(x)\leqslant f(x)+\sum_{l=1}^{m} g_l(x)\int_0^{x_1}\ldots\int_0^{x_k} a_l(t_k,\,x_n)u(t_k,\,x_n)dt_1\,\ldots\,dt_k, \tag{1.21}$$

если положить $g(x)\equiv\max\limits_{1\leqslant l\leqslant m} g_l(x)$ и $a(x)\equiv\sum\limits_{l=1}^{m} a_l(x)$.

С другой стороны, все сформулированные утверждения остаются в силе, если интегральное неравенство (1.1) рассматривать в классе измеримых и существенно ограниченных в произвольной ограниченной подобласти $D\subset R^k_+$ функций, т. е. $u\in L^{\mathrm{loc}}_{\infty}(R^k_+)$. Для этого достаточно предположить, что функции $f(x)$, $g(x)$, $a(x)$ неотрицательны всюду в R^n_+, $f(x)$, $g(x)\in L^{\mathrm{loc}}_{\infty}(R^k_+)$ и $a(x)$ локально суммируема в R^k_+.

В связи с оценками (1.11), (1.12), (1.17), (1.18), (1.19) и (1.20) встает вопрос о поведении функции $I_m(\tau)$ при $\tau\to+\infty$. Заметим, что при $m=2$ $I_2(\tau)=I_0(2i\sqrt{\tau})$, где $I_0(s)$—функция Бесселя нулевого порядка, асимптотика которой хорошо изучена. С другой стороны, согласно известной формуле Стирлинга

$$(2\pi)^{-\frac{m}{2}} \cdot e^{-\frac{m}{12}} \cdot E_{1/m}(\tau; 1) \leqslant I_m(\tau) \leqslant \sqrt{m} \cdot e^{\frac{1}{12m}} \cdot E_{1/m}(m^m\tau; 1); \quad m=2, 3 \ldots,$$

где

$$E_\rho(z; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + k\rho^{-1})}$$

есть функция типа Миттаг-Лефлера, поведение которой подробно изучено в монографии М. М. Джрбашяна [1]. Таким образом, при $\tau \to +\infty$ функция $I_m(\tau)$ ведет себя как функция типа Миттаг-Лефлера порядка $1/m$. В частности, отсюда следует, что

$$I_m(\tau) \leqslant \sqrt{m} \cdot e^{\frac{1}{12m}} \cdot \exp\{m \cdot \tau^{\frac{1}{m}}\}; \quad m=2, 3 \ldots \tag{1.22}$$

Изучению интегральных неравенств типа (1.1) при $n=1$ и $n=2$ посвящено большое число работ, хороший обзор которых можно найти в [3]. Отметим только, что при $n=1$ оценка (1.4) настоящей работы непосредственно совпадает с оценками, полученными в [4–6], а при $n=2$ — с оценкой, полученной в [7]. В частности, основополагающий при $n=2$ результат Вендроффа [2] легко получается из предложенной здесь оценки (1.7). Для случая произвольного n интересные результаты получены в [8], где, в частности, получена оценка (1.7) настоящей работы для случая, когда $g(x) \equiv 1$. Отметим также, что сформулированные выше теоремы 3 и 4 позволяют уточнить результаты работы [8] для классов мультипликативных функций степени выше 1. Так, например, для решений интегрального неравенства

$$u(x) \leqslant f(x) + \int_0^{x_1} \ldots \int_0^{x_4} a(t_1, t_2) b(t_3, t_4) dt_1 dt_2 dt_3 dt_4$$

согласно [8] имеем оценку

$$u(x) \leqslant f(x) \cdot \exp\left\{ \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} a(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \cdot \int_0^{x_3} \int_0^{x_4} b(t_3, t_4) dt_3 dt_4 \right\},$$

если функция $f(x)$ не убывает по каждой из своих переменных, в то время как согласно (1.19) при тех же условиях

$$u(x) \leqslant f(x) \cdot I_0\left(2i \sqrt{\int_0^{x_1} \int_0^{x_2} a(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \cdot \int_0^{x_3} \int_0^{x_4} b(t_3, t_4) dt_3 dt_4}\right),$$

где $I_0(\tau)$ — функция Бесселя нулевого порядка. С другой стороны, предложенные здесь результаты позволяют перенести результаты работы [8] на более общие классы интегральных неравенств.

2. Доказательство. Нам понадобится следующая легко доказываемая

Лемма 2. Обозначим

$$\alpha(t_k; x_n) \equiv \int_{t_1}^{x_1} \ldots \int_{t_k}^{x_k} a(s_k, x_n) ds_1 \ldots ds_k,$$

где $1 \leqslant k \leqslant n$ и $a(x)$—определенная и неотрицательная в R_+^n и локально суммируемая в R_+^k функция. Оценки

$$\int_{t_1}^{x_1} \ldots \int_{t_k}^{x_k} \alpha^p(t_k; s_k, x_n) \frac{\partial^k \alpha(t_k; s_k, x_n)}{\partial s_1 \ldots \partial s_k} ds_1 \ldots ds_k \leqslant \frac{\alpha^{p+1}(t_k; x_n)}{p+1} \tag{2.1}$$

имеют место для любого натурального p.

Перейдем к доказательству сформулированных в 1 утверждений.

1. Самое простое доказательство утверждения леммы 1 можно получить, основываясь на том, что в предположении неотрицательности функции $a(x) \cdot g(x)$ решение интегрального уравнения

$$v(x) = f(x) + g(x) \int_0^{x_1} \ldots \int_0^{x_k} a(t_k, x_n) v(t_k, x_n) dt_1 \ldots dt_k \tag{2.2}$$

является неулучшаемой оценкой сверху для удовлетворяющих неравенству (1.1) функций. То, что определяемая правой частью (1.2) функция есть решение интегрального уравнения (2.2), проверяется непосредственной подстановкой.

2. Очевидно, что решение интегрального уравнения (1.3) имеет вид

$$R(t_k; x_n) = \sum_{p=0}^{\infty} R_p(t_k; x_n), \tag{2.3}$$

где

$$R_0(t_k; x_n) \equiv 1,$$

$$R_p(t_k; x_n) = \int_{t_1}^{x_1} \ldots \int_{t_k}^{x_k} a(s_k, x_n) g(s_k, x_n) R_{p-1}(t_k; s_k, x_n) ds_1 \ldots ds_k; \quad p = 1, 2 \ldots \tag{2.4}$$

Основываясь на лемме 2, можно легко показать, что для функций $R_p(t_k; x_n)$ имеют место оценки

$$R_p(t_k;\ x_n) \leqslant \frac{1}{p!} \cdot \alpha^p(t_k;\ x_n);\ \ p=1, 2 \ldots,$$

где функция $\alpha(t_k;\ x_n)$ определяется выражением (1.5). Тогда согласно (2.3), $R(t_k;\ x_n) \leqslant \exp \alpha(t_k;\ x_n)$ и утверждение теоремы 1 будет непосредственно следовать из оценки (1.2) для любой удовлетворяющей неравенству (1.1) функции $u(x)$.

3. Решение интегрального уравнения (2.2) имеет вид

$$v(x) = \sum_{p=0}^{\infty} v_p(x), \tag{2.5}$$

где

$$v_0(x) \equiv f(x),$$

$$v_p(x) = g(x) \int_0^{x_1} \ldots \int_0^{x_k} a(t_k,\ x_n)\, v_{p-1}(t_k,\ x_n)\, dt_1 \ldots dt_k;\quad p=1, 2 \ldots \tag{2.6}$$

Как и в предыдущем случае, на основе леммы 2 можно показать, что

$$v_p(x) \leqslant g(x) \int_0^{x_1} \ldots \int_0^{x_k} a(t_k,\ x_n)\, f(t_k,\ x_n)\, g^{p-1}(t_k,\ x_n)\, \frac{\alpha^{p-1}(0;\ t_k,\ x_n)}{(p-1)!}\, dt_1 \ldots dt_k;$$

$$p=1,\ 2 \ldots, \tag{2.7}$$

где функция $\alpha(0;\ x_n)$ определяется выражением (1.5). Тогда согласно (2.5)

$$v(x) \leqslant f(x) + g(x) \int_0^{x_1} \ldots \int_0^{x_k} a(t_k,\ x_n)\, f(t_k,\ x_n) \exp\{g(t_k,\ x_n)\,\alpha(0; t_k, x_n)\}\, dt_1 \ldots dt_k,$$

что и доказывает теорему 2, так как $u(x) \leqslant v(x)$ для любой удовлетворяющей неравенству (1.1) функции $u(x)$.

Заметим, что в предположениях теоремы 2 из (2.7) следует, что

$$v_p(x) \leqslant f(x) \cdot \frac{1}{p!} [g(x) \cdot \alpha(0;\ x_n)]^p;\quad p=1, 2 \ldots,$$

откуда уже стандартными рассуждениями можно получить утверждение следствия 1.

4. Доказательство теоремы 3 для простоты проведем для случая $k=n$. Случай $k<n$ приводит лишь к усложнению обозначений.

Как и при доказательстве теоремы 1, решение интегрального уравнения (1.3) определяется функциональным рядом (2.3), каждый элемент которого удовлетворяет рекурентному соотношению (2.4). Используя мультипликативность функции $a(x)\cdot g(x)$, на основе леммы 2 можно показать, что

$$R_p(t_n, x_n) \leqslant \frac{1}{(p!)^m}\left[\alpha_1(t_{1,p_1}; x_{1,p_1}; z_1)\ldots\alpha_m(t_{p_{m-1},n}; x_{p_{m-1},n}; z_m)\right]^p;$$

$$p=1, 2\ldots, \tag{2.8}$$

где каждое из α_i определяется соответствующим выражением (1.9). При этом для $m=n$ (2.8) представляет собой точное равенство. Подставляя (2.8) в (1.2), получим оценку для удовлетворяющих неравенству (1.1) функций, которая совпадает с (1.11), причем для $m=n$ эта оценка является неулучшаемой.

Утверждение теоремы 4 доказывается по той же схеме, только вместо рекурентных соотношений (2.4) для последовательных приближений решения интегрального уравнения (1.3) необходимо рассматривать рекурентные соотношения (2.6) для последовательных приближений решения интегрального уравнения (2.2) и воспользоваться тем, что функция $a(x)$ мультипликативна, а $f(x)$ и $g(x)$ не убывают относительно вектора $(x_1, x_2\ldots x_k)$.

Исходя из оценок, получающихся при доказательстве теоремы 4 для последовательных приближений решения интегрального уравнения (2.2), можно легко получить предложенные выше оценки (1.19) и (1.20), которые составляют содержание следствия 2 настоящей работы.

Ереванский государственный университет

Ց. Հ. ՄԱՄԻԿՈՆՅԱՆ

Որոշ բազմաչափ ինտեգրալ անհավասարությունների գնահատականների մասին

Քառակուսով լոկալ հանրագումարելի ֆունկցիաների դասում դիտարկվում են Գրոնուոլի տիպի որոշ բազմաչափ ինտեգրալ անհավասարություններ։ Այդպիսի անհավասարությունների լուծումների համար ստացված են վերին գնահատականներ, որոնք ընդհանրացնում են միաչափ և երկչափ դեպքերում հայտնի արդյունքները։

Մտցվում է m-րդ աստիճանի մուլտիպլիկատիվ ֆունկցիայի գաղափարը։ Երբ ինտեգրալ անհավասարության կորիզը հանդիսանում է m-րդ աստիճանի որևէ մուլտիպլիկատիվ ֆունկցիա, լուծումների համար բերվում են ավելի ճշգրիտ գնահատականներ։ Մասնավորապես, ցույց է տրվում, որ այդ լուծումների վարքը $x \to +\infty$ դեպքում համընկնում է $1/m$ կարգի Միտտագ-Լեֆլերի տիպի ֆունկցիայի վարքի հետ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. М. Джрбашян*, Интегральные преобразования и представление функций в комплексной области, Наука, М., 1966. [2] *E. F. Beckenbach*, *R. Bellman*, Inequalities, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1961. [3] *А. Н. Филатов*, *Л. В. Шарова*, Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний, Наука, М., 1976. [4] *П. В. Харламов*, Укр. мат. журн., т. 7, № 4 (1955). [5] *G. S. Jones*, J. Soc. Ind. Appl. Math, 12, 43—57 (1964). [6] *Ш. Г. Гамидов*, Дифференциальные уравнения, т. 5, № 3 (1969). [7] *Т. Нуримов*, ДАН УзССР. № 11, (1971). [8] *В. П. Бурлаченко*, *Н. И. Сиденко*, Укр. мат. журн., т. 16, № 4 (1980).