ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXIII 1981 2

УДК 539.3

МЕХАНИКА

Э. Х. Григорян

# Об одной периодической задаче упругой плоскости с бесконечным кусочно-однородным упругим включением

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 29/X 1980)

Рассматривается периодическая задача для упругой плоскости с бесконечным упругим кусочно-однородным включением, когда плоскость деформируется периодическими силами, перпендикулярными включению. Причем включение состоит из двух материалов с модулями упругости $E_1$, $E_2$, периодически повторяющимися по длине включения. Задача сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Оказывается, что контактные тангенциальные напряжения в точках соединения этих материалов имеют логарифмическую особенность, а контактные нормальные напряжения—конечный скачок. Такие поведения контактных напряжений обусловлены неоднородностью включения.

Периодическая задача для полуплоскости с упругими накладками, имеющими одинаковые модули упругости, впервые была рассмотрена в ([1]).

Пусть упругая плоскость с бесконечным упругим включением малой постоянной толщины $h$ деформируется под действием сил

$$Y(x, y)=Q[\delta(y-b)-\delta(y+b)]\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(x-2an).$$

Здесь $\delta(x)$—функция Дирака, $Q$—интенсивность сосредоточенных сил, $a$, $b$—положительные постоянные.

Модуль упругости включения имеет следующий вид:

$$E(x)=P_1(x)E_1+P_2(x)E_2,$$

где

$$P_1(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}[\theta(x+a-4an)-\theta(x-a-4an)],$$

$$P_2(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}[\theta(x-a-4an)-\theta(x+a-4a(n+1))],$$

$$P_1(x)=P_1(x+4a),\quad P_2(x)=P_2(x+4a),\quad P_1(x)+P_2(x)=1,$$

$E_1$, $E_2$—постоянные, $\theta(x)$—функция Хевисайда.

Требуется определить законы распределения контактных напряжений вдоль линии соединения включения с плоскостью. Вследствие малости толщины включения, как в ([2,3]), считается, что она в процессе деформации не изменяется, а под действием только горизонтальных сил включение находится в одноосном напряженном состоянии. С учетом этого уравнения равновесия включение будет даваться в следующем виде:

$$\frac{d^2u^{(1)}}{dx^2}=-\frac{\tau_1(x)}{E_1h}-\frac{\tau_2(x)}{E_2h}-u_0'\sum_{n=-\infty}^{+\infty}[\delta(x+a-4an)-\delta(x-a-4an)],\quad (1)$$

где $\tau_1(x)=P_1(x)\tau(x)$, $\tau_2(x)=P_2(x)\tau(x)$, $\tau(x)$—интенсивность тангенциальных контактных напряжений, $u^{(1)}(x)$—горизонтальные перемещения точек включения, $u_0'=\left.\frac{du^{(1)}}{dx}\right|_{x=a+0}-\left.\frac{du^{(1)}}{dx}\right|_{x=a-0}$.

Теперь, применяя обобщенное преобразование Фурье к (1), имеем:

$$-\sigma^2\bar{u}^{(1)}(\sigma)=-\frac{\bar{\tau}_1(\sigma)}{E_1h}-\frac{\bar{\tau}_2(\sigma)}{E_2h}+2iu_0'\sin a\sigma\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{i4an\sigma}.$$

Здесь

$$\bar{u}^{(1)}(\sigma)=\int_{-\infty}^{+\infty}u^{(1)}(x)e^{i\sigma x}dx,\quad \bar{\tau}_k(\sigma)=\int_{-\infty}^{+\infty}\tau_k(x)e^{i\sigma x}dx,\quad (k=1,2).$$

Отметим, что в смысле теории обобщенных функций

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}e^{ik\sigma}=2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\sigma-2\pi k).$$

С другой стороны, для определения перемещений упругой плоскости надо разрешить следующую систему неоднородных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}&(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2u^{(2)}}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2u^{(2)}}{\partial y^2}+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2v^{(2)}}{\partial x\partial y}=\tau(x)\delta(y),\\&\mu\frac{\partial^2v^{(2)}}{\partial x^2}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2v^{(2)}}{\partial y^2}+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2u^{(2)}}{\partial x\partial y}=-Y(x,y),\end{aligned}\quad (2)$$

где $(u^{(2)}(x,y),\ v^{(2)}(x,y))$—вектор перемещения точек плоскости, $\lambda$, $\mu$—упругие постоянные Ламе.

Очевидно, что под действием вышеуказанных сил контактные напряжения распределятся периодически с периодом $4a$.

Применяя обобщенное преобразование Фурье по переменной $x$:

к (2) и разрешая полученную систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $\overline{u}^{(2)}(\sigma, y)$, $\overline{v}^{(2)}(\sigma, y)$, где

$$\overline{u}^{(2)}(\sigma, y)=\int_{-\infty}^{+\infty}u^{(2)}(x, y)e^{i\sigma x}dx, \quad \overline{v}^{(2)}(\sigma, y)=\int_{-\infty}^{+\infty}v^{(2)}(x, y)e^{i\sigma x}dx,$$

будем иметь

$$\overline{v}^{(2)}(\sigma, 0)=0, \quad \overline{u}^{(2)}(\sigma, 0)=-\frac{\lambda+3\mu}{4\mu(\lambda+2\mu)}\cdot\frac{\overline{\tau}(\sigma)}{|\sigma|}-Q\frac{(\lambda+\mu)b\cdot i\operatorname{sgn}\sigma}{2\mu(\lambda+2\mu)}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{i2an\sigma}.$$

Теперь, имея в виду условие контакта

$$u^{(1)}(x)=u^{(2)}(x, 0), \quad -\infty<x<+\infty,$$

получим

$$(\lambda_1+|\sigma|)\overline{\tau}_1(\sigma)+(\lambda_2+|\sigma|)\overline{\tau}_2(\sigma)=\frac{8\mu(\lambda+2\mu)}{\lambda+3\mu}iu_0'\sin a\sigma\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{i4an\sigma}-$$

$$-\frac{2Q(\lambda+\mu)}{\lambda+3\mu}b\cdot i\sigma|\sigma|e^{-|\sigma|b}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{i2an\sigma}, \qquad (3)$$

$$\lambda_1=\frac{4\mu(\lambda+2\mu)}{E_1h(\lambda+3\mu)}, \quad \lambda_2=\frac{4\mu(\lambda+2\mu)}{E_2h(\lambda+3\mu)}.$$

Уравнение (3) можно записать в следующем виде:

$$\overline{\tau}(\sigma)=(\lambda_2-\lambda_1)\frac{\overline{\tau}_1(\sigma)}{\lambda_2+|\sigma|}+\frac{8\mu(\lambda+2\mu)}{\lambda+3\mu}\cdot\frac{iu_0'\sin a\sigma}{\lambda_2+|\sigma|}\cdot\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{i4an\sigma}-$$

$$-\frac{2Q(\lambda+\mu)}{\lambda+3\mu}\cdot\frac{bi\sigma|\sigma|}{\lambda_2+|\sigma|}\cdot e^{-|\sigma|b}\cdot\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{i2an\sigma}. \qquad (4)$$

Применяя обратное преобразование Фурье к (4), получим

$$\tau(x)=(\lambda_2-\lambda_1)\int_{-\infty}^{+\infty}k(x-s)\tau_1(s)ds+\frac{4\mu(\lambda+2\mu)}{\lambda+3\mu}u_0'\times$$

$$\times\sum_{n=-\infty}^{+\infty}[k(x-a-4an)-k(x+a-4an)]-\frac{2Qb(\lambda+\mu)}{\lambda+3\mu}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}r(x-2an), \qquad (5)$$

где

$$k(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-i\sigma x}}{\lambda_2+|\sigma|}d\sigma, \quad r(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{i\sigma|\sigma|e^{-|\sigma|b}}{\lambda_2+|\sigma|}e^{-i\sigma x}d\sigma.$$

Так как $\tau_1(x+4a)=\tau_1(x)$, то из (5) получается

$$\tau(x)=(\lambda_2-\lambda_1)\int_{-a}^{+a}K(x-s)\tau(s)ds+\frac{4\mu(\lambda+2\mu)}{\lambda+3\mu}u_0'[K(x-a)-$$

(6)

$$-K(x+a)]-\frac{2Qb(\lambda+\mu)}{\lambda+3\mu}R(x), \quad -\infty<x<+\infty,$$

где

$$K(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}k(x-4an), \quad R(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}r(x-2an). \tag{7}$$

Отметим, что $k(x)$ можно представить в следующем виде:

$$k(x)=\frac{1}{\pi}\ln\frac{1}{|\lambda_2 x|}-\frac{c}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{(\lambda_2 x)^{2n}}{\pi(2n)!}\left(\ln\frac{1}{|\lambda_2 x|}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+1+\ldots+\frac{1}{2n}-c\right)-\frac{|\lambda_2 x|^{2n-1}}{2(2n-1)!}\right], \tag{8}$$

$c$—постоянная Эйлера.

Имея в виду (7), (8), для $K(x)$ будем иметь

$$K(x)=\frac{1}{\pi}\ln\frac{1}{2\left|\sin\frac{\pi x}{4a}\right|}+L(x). \tag{9}$$

Здесь $L(x)$ непрерывная функция в рассматриваемом интервале $[-a, a]$.

Таким образом, для определения контактных напряжений, действующих в интервале $-a<x<+a$, получается интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\tau(x)=(\lambda_2-\lambda_1)\int_{-a}^{+a}K(x-s)\tau(s)ds+\frac{4\mu(\lambda+2\mu)}{\lambda+3\mu}u_0'[K(x-a)-$$
$$-K(x+a)]-\frac{2Qb(\lambda+\mu)}{\lambda+3\mu}R(x), \quad -a<x<+a. \tag{10}$$

Из (9), (10) следует, что $\tau(x)$ непрерывна всюду в интервале $(-a, a)$, а в точках $x=\pm a$ имеет логарифмическую особенность, обусловленную неоднородностью включения. Следовательно, решение интегрального уравнения надо искать в классе суммируемых функций. Поскольку

$$\sup_{|s|<a}\int_{-a}^{+a}|K(x-s)|dx=M<+\infty,$$

то отсюда следует, что при $|\lambda_1-\lambda_2|<M^{-1}$ интегральное уравнение (10) в пространстве суммируемых функций $L_1(-a, a)$ можно решать методом последовательных приближений. После определения $\tau(x)$ в интервале $(-a, a)$ значения $\tau(x)$ при $|x|>a$ будут даваться формулой (6). Причем постоянная $u_0'$ определяется из равенства

$$\left.\frac{du^{(2)}(x, 0)}{dx}\right|_{x=a-0} = \frac{E_2}{E_1 - E_2}\, u_0'.$$

Рассмотрим некоторые частные случаи:

а) $E_1 < +\infty$, $E_2 \to +\infty$. В этом случае задача сводится к решению интегрального уравнения

$$\tau(x) + \lambda_1 \cdot \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{+a} \ln \frac{1}{2\left|\sin\frac{\pi(s-x)}{4a}\right|}\tau(s)ds = u_0' - \frac{4\mu(\lambda+2\mu)}{\lambda+3\mu} \times$$

$$\times \ln \frac{\sin\frac{\pi(a-x)}{4a}}{\sin\frac{\pi(a+x)}{4a}} - \frac{2Q\pi^2(\lambda+\mu)b}{a^2(\lambda+3\mu)} \cdot \frac{\operatorname{sh}\frac{\pi b}{a}\sin\frac{\pi x}{a}}{\left(\operatorname{ch}\frac{\pi b}{a} - \cos\frac{\pi x}{a}\right)^2}, \quad |x| < a.$$

б) $E_1 = E_2 < +\infty$. Здесь $\tau(x)$ определяется в виде

$$\tau(x) = -\frac{2Q(\lambda+\mu)b}{\lambda+3\mu} R(x).$$

в) $E_1 \to +\infty$, $E_2 \to +\infty$. В этом случае

$$\tau(x) = -\frac{2Q\pi^2(\lambda+\mu)b}{a^2(\lambda+3\mu)} \cdot \frac{\operatorname{sh}\frac{\pi b}{a}\sin\frac{\pi x}{a}}{\left(\operatorname{ch}\frac{\pi b}{a} - \cos\frac{\pi x}{a}\right)^2}.$$

Для определения нормальных контактных напряжений $\sigma_y(x, 0)$ предположим, что $\tau(x)$ уже определена, и поскольку трансформанта Фурье $\overline{\sigma}_y(\sigma, 0)$ функции $\sigma_y(x, 0)$ выражается через трансформанту Фурье функции $\tau(x)$ по формуле

$$\overline{\sigma}_y(\sigma, 0) = \left(1 + \frac{b|\sigma|(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\right) \cdot Qe^{-|\sigma|b} - \frac{\mu i \operatorname{sgn}\sigma}{2(\lambda+2\mu)} \cdot \overline{\tau}(\sigma), \qquad (11)$$

то, применяя обратное преобразование Фурье, имеем:

$$\sigma_y(x, 0) = \frac{Q}{4a} \cdot \frac{\operatorname{sh}\frac{\pi b}{a}}{\sin^2\frac{\pi x}{2a}\operatorname{ch}^2\frac{\pi b}{2a} + \cos^2\frac{\pi x}{2a}\operatorname{sh}^2\frac{\pi b}{2a}} + \frac{\pi Q b(\lambda+\mu)}{8a^2(\lambda+2\mu)} \times$$

$$\times \frac{1 + \operatorname{ch}\frac{\pi b}{a}\cos\frac{\pi x}{a}}{\left(\sin^2\frac{\pi x}{2a}\operatorname{ch}^2\frac{\pi b}{2a} + \cos^2\frac{\pi x}{2a}\operatorname{sh}^2\frac{\pi b}{2a}\right)^2} + \frac{\mu}{8a(\lambda+2\mu)} \cdot \int_{-a}^{+a} \operatorname{ctg}\frac{\pi(s-x)}{4a}\tau(s)ds.$$

Из (4), (11) нетрудно заметить, что $\sigma_y(x, 0)$ в точках $x = \pm a$ имеет конечный скачок, обусловленный неоднородностью включения.

Ереванский государственный университет

## Անվերջ կտոր-առ-կտոր համասեռ առաձգական ներդիրով առաձգական հարթության մի պարբերական խնդրի վերաբերյալ

Դիտարկվում է պարբերական խնդիր անվերջ կտոր-առ-կտոր համասեռ ներդիրով առաձգական հարթության համար, երբ հարթությունը դեֆորմացվում է ներդիրին ուղղահայաց պարբերական ուժերով։ Ներդիրը կազմված է երկու նյութերից, որոնց առաձգականության մոդուլները պարբերաբար կրկնվում են ներդիրի երկարությամբ։ Խնդիրը բերվում է Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարման լուծմանը։ Պարզվում է, որ կոնտակտային շոշափող լարումները, այդ նյութի միացման կետերում, ունեն լոգարիթմական եզակիություն, իսկ կոնտակտային նորմալ լարումները՝ վերջավոր թռիչք։ Կոնտակտային լարումների այդպիսի վարքերը պայմանավորված են ներդիրի անհամասեռությամբ։

### ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. Х. Арутюнян, С. М. Мхитарян*, ПММ, т. 33, вып. 5 (1969) [2] *E. Melan*, Ingr-Arch., Bd 3, № 2 (1932). [3] *H. Bufler*, VDI-Forschungsheft 485, Beilage zu „Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens". Ausgabe B, Band 27, (1951).