УДК 513

МАТЕМАТИКА

М. А. Мнацаканян

О площади области на развертывающейся поверхности

(Представлено академиком В. А. Амбарцумяном 2/VIII 1981)

1. Семейство касательных к пространственной кривой Γ образует *развертывающуюся поверхность* (РП). Положение точки A на РП определяется расстоянием $u=AM$ по касательной к Γ и задающей точку касания M длиной v дуги (кривой) Γ . Как известно ⁽¹⁾, коэффициенты первой дифференциальной формы Гаусса для РП равны: $E=1$, $F=1$, $G=1+u^2/\rho^2$, где $1/\rho$ —кривизна Γ . Введем координаты (u, φ) , где φ —угол на РП между двумя касательными к Γ . Тогда площадь некоторой области Ω на РП, ограниченной кривыми $u(\varphi)$ и Γ -уровнем $u(\varphi)=0$, и двумя касательными к Γ , определяемыми углами φ_1 и φ_2 , дается выражением

$$S = \iint_{\Omega} \sqrt{EG-F^2} \, du \, dv = \iint_{\Omega} u \, du \, dv / \rho = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} u^2 \, dv / \rho$$

и, согласно определению кривизны $1/\rho = d\varphi = dv$, равна

$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} u^2(\varphi) \, d\varphi. \tag{1}$$

Мы видим, что S не зависит явно от длины v дуги Γ .

Назовем *годографом* области Ω такую область на конической поверхности, которая получается параллельным переносом отрезков $u(\varphi)$ началами к одной точке M_0 —вершине годографа. Выбрав в качестве Γ точку M_0 , замечаем, что, с другой стороны, выражение (1) определяет полярную площадь на конической поверхности. Следовательно, справедлива.

Теорема. *Площадь любой области на развертывающейся поверхности равна площади годографа этой области (на конической поверхности).*

Другое, простое доказательство теоремы следует из равенства площади элементарного треугольника на РП, образованного двумя бесконечно близкими касательными к Γ и кривой $u(\varphi)$, и площади соответствующего треугольника-годографа. В справедливости теоремы можно убедиться еще проще, рассматривая Γ , согласно определению кривой линии, как предельный случай описанной около нее ломаной. Относительно же произвольной ломаной очевидно, что утверждение теоремы выполняется *точно*.

Будем говорить, что *отрезок вращается вокруг дуги Γ* , если он всегда находится на касательной к Γ . Площадь заметаемой им при этом фигуры зависит не от размеров дуги Γ , а только от закона изменения расстояний $u_1(\varphi)$ и $u_2(\varphi)$ до концов отрезка в зависимости от его направления в пространстве. Можно произвольно менять размеры дуги Γ , оставляя ее *подобной себе*,—при этом заметаемая площадь останется *неизменной*. В пределе, стянув дугу Γ в точку, приходим к вращению отрезка на годографе.

Утверждение теоремы допускает наглядную кинематическую интерпретацию. При бесконечно малом вращении вокруг дуги Γ отрезок совершает два мгновенных движения—вращение вокруг точки касания, сопровождающееся растяжением $u(\varphi)$, и скольжение вдоль себя. При скольжении вдоль себя отрезок никакой площади не замечает, вся площадь же замечается при вращениях вокруг точек касания—они и соответствуют вращению на годографе. Тривиален случай вращения отрезка вокруг ломаной—заметаемые им участки площадей сосредоточены у вершин ломаной; последние очевидным образом «складываются» в годограф.

Мы проиллюстрируем теорему о годографе на ряде примеров определения площадей. Затем дадим развитие теоремы применительно к нахождению объемов тел «вращения» вокруг цилиндров и конусов, а также специальных тел вращения. Заметим, что приведенные выше два простых доказательства теоремы, а также ее наглядная кинематическая интерпретация позволяют отнести как саму теорему, так и решения рассматриваемых ниже примеров п. 2—5 (и ряд других) к разряду элементарных.

2. Рассмотрим примеры определения площадей в частном случае, когда Γ —*плоская* кривая. Задача будет состоять фактически в *построении годографов*. Они строятся из элементарных геометрических соображений и представляют собой простейшие фигуры. Зная их площади, мы тем самым, согласно теореме, знаем и *искомые* площади. В примерах, отмеченных звездочками, формулируются новые результаты, в остальных—известные из курсов высшей математики (см., например, (2)).

Примеры. а)* Отрезок постоянной длины a , вращаясь вокруг замкнутой кривой, замечает «*овальное*» кольцо. Годограф такого кольца—*круг* радиуса a , и его площадь равна πa^2 . В известном примере *кругового* кольца эта площадь вычисляется с помощью теоремы Пифагора.

б) *Трактриса*—кривая с постоянным отрезком a касательной до оси абсцисс. Годограф (двусторонней) трактрисы есть *полукруг* радиуса a , и, следовательно, площадь трактрисы равна $\pi a^2/2$.

Годограф симметрично *отсеченной трактрисы* образует *сегмент круга*, отсеченный на расстоянии от центра, равном ширине сечения.

в)* *Обобщенная трактриса*. Фигура, очерчиваемая следами колес велосипеда, замечается при вращении отрезка a —между осями колес, вокруг траектории заднего колеса. Годограф ее—*сектор круга* радиуса a . Примеры а) и б) следуют отсюда как частные случаи.

Если велосипед сворачивает с некоего направления на перпендикулярное, то искомая площадь равна $\pi a^2/4$, независимо от формы кривой поворота.

г) *Циклоида*—траектория точки катящейся по прямой окружности. В каждый момент круг совершает мгновенное вращение вокруг точки касания, так что касательная к циклоиде упирается всегда в верхнюю точку катящегося круга, служа его хордой. Вращаясь вокруг циклоиды, эта хорда замечает арку над ней—между циклоидой и описанным около нее прямоугольником. Поэтому годограф этой *арки*—*катящийся круг*.

Симметрично *отсеченная* часть этой арки имеет годографом *сегмент* катящегося круга с высотой, равной ширине сечения арки.

д)* *Линия погони*—траектория собаки, бегущей все время в направлении на удирающую лису. Если их скорости равны и лиса бежит по прямой, то в течение всей погони отрезок «собака—лиса» и его проекции на лисью дорожку в сумме сохраняют постоянную длину. Следовательно, фигура, ограниченная траекториями лисы и собаки и отрезком, соединяющим их начальные позиции, имеет годографом *сектор параболы* с вершиной в ее фокусе.

3. Пусть плоская кривая Γ служит направляющей цилиндра и в плоскости, касающейся этого цилиндра, расположена фигура Φ . Пусть эта плоскость *вращается вокруг цилиндра*, оставаясь все время касательной к его поверхности. Тогда фигура Φ заметет некое тело «вращения». В любом сечении рассматриваемой пространственной картины, параллельном плоскости Γ , имеет место теорема о годографе, в силу чего справедливо

Следствие 1. Объем тела вращения плоской фигуры вокруг цилиндра не зависит от размеров цилиндра и равен объему годографа, образуемого соответствующим вращением фигуры вокруг неподвижной оси.

Примеры. а) *Шар с цилиндрическим отверстием* получается вращением полукруга вокруг цилиндра. Поэтому объем такого кольца равен объему шара с диаметром, равным высоте отверстия. Аналогичный результат верен и для некругового цилиндра.

б) Сечение кругового конуса, параллельное его оси, образует гиперболу. При вращении вокруг оси конуса это сечение огибает некий цилиндр. При этом сегмент гиперболы замечает *конус с цилиндрическим отверстием*, объем которого легко найти. Вращаясь же вокруг

своей оси, этот сегмент гиперболы образует годограф—сегмент *двуполостного гиперболоида*—с тем же (искомым) объемом.

в)* *Однополостный гиперболоид* получается вращением плоского угла вокруг цилиндра. Его объем складывается из объемов вписанного в него цилиндра и годографа—конуса, образуемого вращением угла вокруг своей стороны.

4. По аналогии с п. 3 рассмотрим вращение плоской фигуры вокруг конической поверхности. Из подобия кривых Γ , являющихся параллельными сечениями конической поверхности, выводим

Следствие 2. Объем тела вращения плоской фигуры вокруг конуса не зависит от сдвига фигуры вдоль образующей конуса (к вершине или от). Для кругового конуса с углом при вершине 2α этот объем равен объему годографа, умноженному на $\cos\alpha$.

Примеры. а) Шар с коническим отверстием получается вращением полукруга вокруг конуса. Поэтому объем такого кольца равен объему шара с диаметром, равным стороне отверстия, умноженному на $\cos\alpha$.

б) Эллипс—сечение цилиндра, вращаясь вокруг оси цилиндра, огибает некий конус. При этом эллипс вращается вокруг этого конуса, заметая *цилиндр с конической воронкой* объемом в $2/3$ объема цилиндра. С другой стороны, этому объему равен объем *эллипсоида вращения*, умноженный на $\cos\alpha$. С учетом этого фактора находим, что объем эллипсоида вращения (в частности, шара) в полтора раза меньше объема описанного цилиндра.

в) Парабола—сечение конуса, параллельное его образующей. Вращаясь вокруг оси конуса, оно огибает перевернутый (подобный) конус. Вращаясь же вокруг своей оси, образует *параболоид*, служащий годографом исходного конуса с конической воронкой, объем которого легко определить. Учитывая фактор $\cos\alpha$, находим: параболоид вдвое меньше описанного цилиндра.

Заметим, что в случае вращения вокруг кругового цилиндра или конуса объемы можно найти элементарно и без теоремы о годографе, используя свойство кругового кольца из примера а) п. 1, т. е. теорему Пифагора (автор (3)).

5. Центр тяжести треугольника отстоит от основания на треть высоты, поэтому при вращении вокруг основания треугольник заметает объем, вдвое меньший, чем при вращении вокруг сси, параллельной основанию и проходящей через противоположающую вершину треугольника. Отсюда вытекает

Следствие 3. Пусть при вращении отрезка вокруг дуги Γ его конец движется по прямой X . Тогда объем тела вращения вокруг оси X фигуры Φ , ограниченной линиями Γ и X , равен половине объема тела, образованного вращением годографа этой фигуры вокруг оси H , проходящей через вершину годографа параллельно оси X .

Примеры. а)* *Псевдосфера* образуется вращением трактрисы вокруг оси абсцисс X . Так как годограф трактрисы—полукруг радиуса a , то объем псевдосферы равен половине объема шара радиуса a .

В общем случае объем симметрично отсеченной псевдосферы равен объему полушария с цилиндрическим отверстием, высота которого равна отрезку ax подкасательной в точке отсечения, или, согласно примеру а) п. 3, половине объема шара с радиусом ax .

б)* Линия погони (пример д) п. 2), вращаясь вокруг «лисьей» прямой, ограничивает тело, объем которого равен половине объема сектора параболоида (с вершиной в фокусе параболоида).

6. Рассмотрим произвольную линию Γ , заданную натуральным уравнением. Последнее легко свести ⁽²⁾ к виду $u = u(\varphi)$ — зависимости длины дуги от угла наклона касательной или к обратному $\varphi = \varphi(u)$. Тогда в обобщенной форме теорема о годографе позволяет решить также следующие

Примеры. а)* Площадь фигуры, заключенной между произвольной кривой $u(\varphi)$ и ее эвольвентой, дается формулой (1). Заметим в частности, что для эвольвенты окружности годографом служит спираль Архимеда.

б)* Площадь одной арки, описываемой точкой окружности, катящейся по произвольной кривой $\varphi(u)$, больше площади катящегося круга в K раз:

$$K = 3 - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(u) \sin u du. \quad (2)$$

Частные случаи: $\varphi(u) = 0$ — циклоида, $\varphi(u) = \pm \frac{r}{R} u$ — эпи- или гипоциклоида, $K = 3 \pm 2 \frac{r}{R}$.

Аналогичным образом можно также определить (с помощью теоремы о годографе) площади: гиперболы, показательной линии, подэры круга (в частности, кардиоиды), подэры эвольвенты круга; объемы тел вращения: показательной линии вокруг асимптоты, фигур, ограниченных кривыми Персея (в частности, овалами Кассини, лемнискатами Бута и Бернулли), вокруг оси симметрии, циклоиды вокруг касательной в ее вершине.

Мы рассмотрели примеры только с плоскими кривыми Γ . Их аналоги, очевидно, выполняются и на развертывающихся поверхностях, поскольку из условия наложимости развертываемой поверхности на плоскость следует эквивалентность формулировок теоремы о годографе для случаев пространственной и плоской кривых Γ .

Փոփոզման մակերևույթի տիրույթի մակերեսի մասին

Ապացուցվում է թեորեմ, որ փոփոզման մակերևույթի վրա գտնվող կամայական տիրույթի մակերեսը հավասար է կոնական մակերևույթի վրա գտնվող այդ տիրույթի հոդոգրաֆի մակերեսին:

Որպես կիրառություն որոշվում են երկրաչափական մի շարք ֆիզուրների մակերեսները և ծավալները: Թեորեմի մեկնաբանությունը և դիտարկվող օրինակների լուծումները կարելի է դասել տարրականների շարքին:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ С. П. Фиников, Дифференциальная геометрия, ГИТТЛ, М., 1952. ² А. А. Савелов, Плоские кривые, ГИФМЛ, М., 1960. ³ М. Мамикон, Объем шара, Квант, № 5, 1977.