ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXIII 1981 2

УДК 517.51

МАТЕМАТИКА

Г. Г. Геворкян

О множествах единственности для систем Хаара и Уолша

(Представлено чл.-корр АН Армянской ССР А. А. Талаляном 15/V 1981)

Зигмундом была доказана (см. ([1]), стр. 550)

Теорема (Зигмунд). *Пусть $\varepsilon_n \downarrow 0$. Тогда для любой $\varepsilon>0$ существует множество $E\subset[-\pi, \pi]$, $\mu(E)<\varepsilon$, такое, что если тригонометрический ряд $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{inx}$ сходится к нулю всюду на E и $|a_n|\leqslant \leqslant \varepsilon_{|n|}$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, то $a_n=0$ для всех n.*

В дальнейшем Каханом и Кацнельсоном ([2]) эта теорема была усилена. Ими было показано, что в формулировке теоремы Зигмунда можно добиться того, чтобы соответствующее множество E имело меру, равную нулю.

В работе Шапиро ([3]) теорема Зигмунда распространена на ряды по системе Уолша, а в работе Вейда ([4]) доказана

Теорема (Вейд). *Пусть $\varepsilon_n \downarrow 0$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует множество $E\subset[0, 1]$, $\mu(E)<\varepsilon$, такое, что если ряд Хаара $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\chi_n(x)$ сходится к нулю всюду на E и $|a_n\sqrt{n}|<\varepsilon_n$, $n=0, 1, 2, \ldots$, то все a_n равны нулю.*

В настоящей работе приводятся усиления вышеуказанных результатов Шапиро и Вейда о множествах единственности рядов по системам Уолша и Хаара.

В дальнейшем через $\{W_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ обозначается система Уолша, а через $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$—система Хаара.

Верна следующая

Теорема 1. *Пусть $\varepsilon_n \downarrow 0$. Существует множество $E\subset[0, 1]$, $\mu E=0$, такое, что если $|a_n|\leqslant\varepsilon_n$, $n=1, 2, \ldots$ и для некоторой подпоследовательности $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$*

$$\lim_{i\to\infty}\sum_{k=0}^{2^{n_i}-1} a_k W_k(x)=0, \quad x\in E,$$

то $a_k=0$, $k=0, 1, 2, \ldots$

Из теоремы 1 немедленно следует следующее усиление теоремы Вейда.

Теорема 2. *Пусть* $\varepsilon_n \downarrow 0$. *Существует множество* $E \subset [0, 1]$, $\mu E = 0$, *такое, что если* $|a_n \sqrt{n}| \leqslant \varepsilon_n$, $n = 0, 1, 2 \ldots$ *и для некоторой подпоследовательности* $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$

$$\lim_{i\to\infty} \sum_{k=0}^{n_i} a_k \chi_k(x) = 0, \quad x \in E,$$

то $a_k = 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Для доказательства теоремы 1 нам нужны следующие вспомогательные утверждения.

Теорема 3. *Пусть* $\varepsilon_n \downarrow 0$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует множество* $E \subset [0, 1]$, $\mu E < \varepsilon$, *такое, что если* $|a_n| \leqslant \varepsilon_n$ *и для некоторой подпоследовательности* $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$

$$\lim_{i\to\infty} \sum_{k=0}^{2^{n_i}-1} a_k W_k(x) = 0, \quad x \in E,$$

то все a_k *равны нулю.*

Теорема 3 также является усилением теоремы Шапиро и Вейда. Она доказывается точно так же, как и теорема Шапиро, только там, где Шапиро использует теорему Шнейдера (см. ([5])) о единственности рядов Уолша, нужно использовать теорему 4 из ([6]).

Теорема 4. *Пусть* $\varepsilon_n \downarrow 0$. *Тогда существует множество* $E \subset [0, 1]$, $\mu E = 0$, *такое, что если* $|a_n| \leqslant \varepsilon_n$ *и для некоторой подпоследовательности* $\{n_i\}$

$$\Big|\sum_{k=0}^{2^{n_i}-1} a_k W_k(x)\Big| < M < +\infty, \ x \in E; \ \lim_{i\to\infty} \sum_{k=0}^{2^{n_i}-1} a_k W_k(x) = 0, \quad x \in E,$$

то все a_k *равны нулю.*

Основной леммой для доказательства теоремы 4 является следующая

Лемма. *Пусть* $\varepsilon_n \downarrow 0$ *и* m *произвольное натуральное число. Существует монотонная сингулярная функция* $f(x)$, *которая удовлетворяет следующим условиям (обозначим* $\hat{f}(n) = \int_0^1 W_n(x) df(x)$ $n = 0, 1, 2, \ldots$*)*

1) $\hat{f}(m) = 1$;

2) $\sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)| \varepsilon_n < +\infty$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать $\varepsilon_{n_1} = \varepsilon_{n_2}$, когда $2^k \leqslant n_1, n_2 < 2^{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$. Пусть $\varepsilon_n = \delta_k$ при $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$. Обозначим

$$\varphi_0(x) = 1 + W_m(x). \tag{1}$$

Через $\{r_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ обозначим систему Радемахера (определение см., например, в ([7])). Выберем n_k таким образом, чтобы $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k \delta_{n_k} < +\infty$, $n_k > 2k$ и $n_1 > \log_2 m + 1$. Пусть

$$\varphi_j(x) = \varphi_{j-1}(x)(1 + r_{n_j}(x)),\ j = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Легко видеть, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \int_0^1 W_n(x) \varphi_j(x) dx \right| \varepsilon_n = \varepsilon_0 + \varepsilon_m + \sum_{n=1}^{j} 2^k \delta_{n_k}. \tag{3}$$

Обозначим $E_j = \{x : \varphi_j(x) \neq 0\}$. Из свойств функций Радемахера и из (2) следует

$$\mu E_j = \frac{1}{2^{j+1}} \text{ и } E_j \subset E_{j-1}. \tag{4}$$

Пусть

$$f_j(x) = \int_0^x \varphi_j(x) dx. \tag{5}$$

Интегрируя (2), легко заметить, что $f_j(x) = f_{j-1}(x)$ вне E_{j-1}, так как интеграл функции $1 + r_{n_j}(x)$ на интервалах, где $\varphi_{j-1}(x)$ принимает отличное от нуля постоянное значение, равен длине этого интервала. Легко также увидеть, что (из (2) и (5))

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |f_{j+1}(x) - f_j(x)| \leq \frac{2^{j+1}}{2^{n_j}},\ j = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Поэтому последовательность $\{f_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ равномерно сходится к непрерывной сигнулярной функции $f(x)$ (см. (1), (2), (4), (5) и (6)). Из (3) и (5) имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \hat{f}_j(n) \right| \varepsilon_n = \varepsilon_0 + \varepsilon_m + \sum_{k=1}^{j} 2^k \delta_{n_k}. \tag{7}$$

По теореме Хелли в (7) можно перейти к пределу (см. ([8]), стр. 254). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 4. Для каждого номера m, $m = 0, 1, 2, \ldots$, построим соответствующие функции $f_m(x)$, удовлетворяющие требованиям леммы. Пусть A_m носитель меры $df_m(x)$, $\mu A_m = 0$, и A счетное всюду плотное множество двоично-иррациональных чисел. Покажем, что множество

$$E = A \dot{+} \bigcup_{m=0}^{\infty} A_m^{*} \tag{8}$$

удовлетворяет требованиям теоремы 4. Легко увидеть, что $\mu E = 0$. Пусть $\sum_{n=0}^{2^{n_i}} a_n W_n(x)$ сходится к нулю на E и $|a_n| < \varepsilon_n$. Пусть $u \in A$, $v \in \in \bigcup_{m=0}^{\infty} A_m$ и $x = u \dot{+} v \in E$. Тогда

$$\sum_{n=0}^{2^{n_i}-1} a_n W_n(x) = \sum_{n=0}^{2^{n_i}-1} a_n W_n(u) W_n(v), \tag{9}$$

быть может, за исключением счетного множества значений v. Возьмем произвольное m и интегрируем (9) по мере $df_m(v)$ (счетное множество имеет нулевую меру по мере $df_m(v)$). Получим

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{2^{n_i}-1} W_n(u \dot{+} v) df_m(v) = \sum_{n=0}^{2^{n_i}-1} a_n \hat{f}_m(n) W_n(u). \tag{10}$$

Но левая часть (10) стремится к нулю (по теореме Лебега). Значит

$$\lim_{i \to \infty} \sum_{n=0}^{2^{n_i}-1} a_n \hat{f}_m(n) W_n(u) = 0 \text{ при } u \in A \text{ и } \sum_{n=0}^{\infty} |a_n \hat{f}_m(n)| < +\infty. \tag{11}$$

Следовательно, все $a_n \hat{f}_n(m)$ равны нулю. Поэтому $a_m = 0$, так как $\hat{f}_m(m) \neq 0$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1. Без ограничения общности можно считать, что $\varepsilon_n = \varepsilon_m$, когда $2^k \leqslant m$, $n < 2^{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$. Пусть E_n—открытое множество, удовлетворяющее требованиям теоремы 3, и $\mu E_n < \frac{1}{n}$, C—множество, удовлетворяющее требованиям леммы, а B—множество двоично-рациональных точек. Покажем, что множество $E = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) \cup B \cup C$ удовлетворяет требованиям теоремы 1. Пусть частичные суммы $S_i(x) = \sum_{n=0}^{2^{n_i}-1} a_n W_n(x)$ сходятся к нулю на E и $|a_n| < \varepsilon_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Из того, что $S_i(x)$ сходится к нулю на B, следует, что множество

$$G = \{x : \limsup_{i \to \infty} |S_i(x)| \geqslant 1\}$$

—множество типа G_δ. Нетрудно убедиться, что если $G = \varnothing$, то $|S_i(x)| \leqslant 1$ для всех $x \in [0, 1]$, $i = 1, 2, \ldots$. Это следует из того, что ряд Хаара $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \chi_n(x)$, полученный из ряда Уолша $\sum_{n=1}^{\infty} a_n W_n(x)$, удов-

---

* $0 \dot{+}$ см. ([5]). $E = \left\{ x \dot{+} y : x \in A,\ y \in \bigcup_{m=0}^{\infty} A_m \right\}$.

летворяет условию $b_{k_l}/\chi_{k_l}(x)\to 0$ для любого x, где $\{k_l\}$—все те номера n, для которых $\chi_n(x)\neq 0$ (см., например ([9]), стр. 410).

Покажем, что $G=\varnothing$. Если $G\neq\varnothing$, то из того, что G—множество типа G_δ, $G\subset\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^c$ и E_n^c—замкнутые множества, следует существование интервала I—типа Хаара и номера m, для которых (см. ([1]), стр. 548, лемма 6.17)

$$\varnothing\neq I\cap G\subset I\cap E_n^c. \tag{12}$$

Пусть J некоторый интервал типа Хаара и

$$J\subset I, \qquad J\subset E_n. \tag{13}$$

Пусть $\sum_{n=0}^{\infty} b_n W_n(x)$—разложение по системе Уолша характеристической функции интервала I (оно представляет собой конечную сумму). Обозначим через $\sum_{n=0}^{\infty} c_n W_n(x)$ формальное произведение ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n W_n(x)$ на $\sum_{n=0}^{\infty} b_n W_n(x)$ (см. ([5])). Очевидно, что для достаточно больших i имеют место

$$\sum_{n=0}^{2^{n_i}-1} a_n W_n(x)=\sum_{n=0}^{2^{n_i}-1} c_n W_n(x) \text{ при } x\in J \tag{14}$$

и

$$\sum_{n=0}^{2^{n_i}-1} c_n W_n(x)=0 \text{ при } x\notin \bar{I}. \tag{15}$$

Легко заметить, что $|c_n|<M\varepsilon_n$, $M>0$, $n=1, 2, \ldots$. Из (14) и (15) следует, что $\left\{x:\limsup_{i\to\infty}\left|\sum_{n=0}^{2^{n_i}-1} c_n W_n(x)\right|\geqslant 1\right\}=\varnothing$. Поэтому частичные суммы $\sum_{n=0}^{2^{n_i}-1} c_n W_n(x)$ равномерно ограничены. Кроме того, из (14) и (15) вытекает, что

$$\lim_{i\to\infty}\sum_{n=0}^{2^{n_i}-1} c_n W_n(x)=0, \quad x\in C. \tag{16}$$

Из леммы следует, что $c_n=0$ для всех n. Из этого, из (14) и из того, что J произвольный интервал типа Хаара, лежащий в $I\cap E_n$, следует

$$\lim_{i\to\infty}\sum_{n=0}^{2^{n_i}-1} a_n W_n(x)=0 \text{ при } x\in I\cap E_n. \tag{17}$$

Пусть $\sum_{n=0}^{\infty} d_n W_n(x)=\chi_I(x)$, где $\chi_I(x)$—характеристическая функция интервала I. Рассмотрим формальное произведение рядов $\sum_{n=0}^{\infty} a_n W_n(x)$

и $\sum_{n=0}^{\infty} d_n W_n(x)$, которое обозначим через $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n W_n(x)$. Рассуждая так же, как и выше, получим

$$\lim_{i\to\infty} \sum_{n=0}^{2^{n_i}-1} \gamma_n W_n(x) = 0 \quad \text{при } x \in E_n \text{ и } |\gamma_n| < M\varepsilon_n. \tag{18}$$

По теореме 3 из (18) следует, что $\gamma_n=0$, $n=0, 1, 2, \ldots$. Поэтому

$$\lim_{i\to\infty} \sum_{n=0}^{2^{n_i}-1} a_n W_n(x) = 0, \quad x \in I;$$

это противоречит тому, что $G \cap I \neq \varnothing$. Итак, $G=\varnothing$ и поэтому все частичные суммы $S_i(x)$ равномерно ограничены. Согласно лемме, отсюда следует, что $a_n=0$, $n=0, 1, 2, \ldots$.

В заключение выражаю благодарность профессору А. А. Талаляну, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Ереванский государственный университет,

Գ. Գ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ

Հաարի և Ուոլշի համակարգերի միակության բազմությունների մասին

Աշխատանքում ապացուցված է.

Թեորեմ 1. Դիցուք $\varepsilon_n \downarrow 0$: *Այդ դեպքում գոյություն ունի* $E \subset [0, 1]$, $\mu E=0$, *այնպիսին, որ եթե* $|a_n| \leqslant \varepsilon_n$ *և ինչ-որ* $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ *բնական թվերի ենթահաջորդականության համար*

$$\lim_{i\to\infty} \sum_{n=0}^{2^{n_i}-1} a_n W_n(x) = 0, \quad x \in E,$$

ապա $a_n=0$, $n=0, 1, 2, \ldots$։

Թեորեմ 1-ից հետևում է.

Թեորեմ 2. Դիցուք $\varepsilon_n \downarrow 0$։ Այդ դեպքում գոյություն ունի $E \subset [0, 1]$, $\mu E=0$, այնպիսին, որ եթե $|a_n \sqrt{n}| \leqslant \varepsilon_n$ և $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$, բնական թվերի ենթահաջորդականության համար

$$\lim_{i\to\infty} \sum_{n=0}^{n_i} a_n \chi_n(x) = 0, \quad x \in E$$

ապա $a_n=0$, $n=0, 1, 2, \ldots$.

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. Зигмунд.* Тригонометрические ряды. Т. 1, М., 1965. [2] *J. P. Kahane, Y. Katznelsen*, C. R. Acad Sci., Paris, Ser. A, vol. 277 (1973). [3] *V. Shapiro*, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 16 (1965). [4] *W. R. Wade,* Acta Math. 30 (3—4) (1977). [5] *А. А. Шнейдер,* Мат. сб., 1949, т. 24. [6] *Ф. Р. Арутюнян, А. А. Талалян,* Изв. АН СССР, сер. мат., т. 28(1964). [7] *С. Качмаж, Г. Штейнгауз,* Теория ортогональных рядов. М., 1958. [8] *И. П. Натансон,* Теория функций вещественной переменной, М., 1957. [9] *Ф. А. Талалян,* Изв. АН АрмССР, сер. мат. т. 5, № 5 (1970).