УДК 517.51

МАТЕМАТИКА

М. Ж. Григорян

О сходимости в метрике $L^p, 0 < p < 1$, сферических частичных сумм кратных рядов Фурье суммируемых функций

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 29/IV 1981)

Пусть $x \in R^m$, $x = (x_1, \dots, x_m)$, E^m — целочисленная решетка в R^m , $n \in E^m$, если $n = (n_1, \dots, n_m)$, n_j целые: положим $n \cdot x = n_1 \cdot x_1 + \dots + x_m \cdot n_m$

Пусть I — интервал в R^m

$$I = \left\{ x \in R^m, |x_j| \leq \frac{1}{2}, 1 \leq j \leq m \right\},$$

а функция $f(x)$ определена в нем и интегрируема по Лебегу.

Сферические частичные суммы ряда Фурье функции $f(x)$ имеют вид

$$S_N(x, f) = \sum_{|n| < N} a_n(f) e^{2\pi i n x}, \text{ где } a_n(f) = \int_I f(t) e^{-2\pi i n t} dt.$$

В настоящей работе рассматривается вопрос сходимости в метрике $L^p, 0 < p < 1$, сферических частичных сумм кратных рядов Фурье суммируемых функций. В этом направлении при $m=1$, (см. (1), стр. 597) одним из важных результатов является теорема о том, что ряд Фурье суммируемой функции сходится в метриках L^p для любого $p, 0 < p < 1$.

При $m \geq 2$ картина существенно иная.

Имеет место следующая

Теорема 1. Существует суммируемая на I функция $f_0(x)$ такая, что сферические частичные суммы ее ряда Фурье расходятся в метрике $L^p, 0 < p < 1$.

Используя элементы конструкции К. И. Бабенко, примененной им в работе (2), можно установить следующую теорему.

Теорема 2. Пусть даны числа p, α, x , удовлетворяющие условиям: $0 < p < 1, \alpha \geq 0, x > 0, \frac{m-1}{2} - \alpha - x > 0$.

Тогда для любого натурального N имеет место неравенство

$$\int_I \left| \sum'_{|n| \leq N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right)^\alpha |n|^{-\alpha} e^{2\pi i n x} \right|^p dx > \text{const} \cdot N^{p\left(\frac{m-1}{2} - \alpha - \varepsilon\right)}, \quad (*)$$

где штрих у знака суммы означает, что слагаемые, отвечающие $|n|^2 = N^2$, берутся с коэффициентом $1/2$.

Теперь докажем теорему 1, используя теорему 2.

Заметим, что при $0 < x < m$ (см. (3), стр. 286) $\sum |n|^{-\alpha} e^{2\pi i n x}$ есть ряд Фурье интегрируемой функции $f_0(x)$.

Оценим снизу сферические частичные суммы $S_N(x, f_0)$ кратного ряда Фурье функции $f_0(x)$.

При $\alpha = 0$ неравенство (*) имеет вид

$$\int_I \left| S_N(x, f_0) + \frac{1}{2} \sum_{|n|=N} |n|^{-\alpha} e^{2\pi i n x} \right|^p dx > \text{const} \cdot N^{p\left(\frac{m-1}{2} - \alpha\right)},$$

следовательно

$$\int_I |S_N(x, f_0)|^p dx > \text{const} N^{p\left(\frac{m-1}{2} - \alpha\right)} - 2^{-p} \cdot N^{-p\alpha} \int_I \left| \sum_{|n|=N} e^{2\pi i n x} \right|^p dx. \quad (1)$$

Применяя неравенство Гельдера, получим

$$\int_I \left| \sum_{|n|=N} e^{2\pi i n x} \right|^p dx \leq \left(\int_I \left[\sum_{|n|^2=N^2} e^{2\pi i n x} \right]^2 dx \right)^{\frac{p}{2}} = \left[r_m(N^2) \right]^{\frac{p}{2}}, \quad (2)$$

где через $r_m(N^2)$ обозначено число целочисленных решений диафантова уравнения

$$n_1^2 + \dots + n_m^2 = N^2.$$

Для любого δ числа $r_m(N^2)$ удовлетворяют условиям (см. (2), с. 39)

$$r_m(N^2) \leq c_{m,\delta} N^{2\left(\frac{m}{2} - 1 + \delta\right)}, \quad (3)$$

Учитывая (1), (2), (3), получим

$$\begin{aligned} \int_I |S_N(x, f_0)|^p dx &> \text{const} \cdot N^{p\left(\frac{m-1}{2} - \alpha\right)} - 2^{-p} N^{-p\alpha} \cdot N^{p\left(\frac{m}{2} - 1 + \delta\right)} = \\ &= \text{const} N^{p\left(\frac{m-1}{2} - \alpha\right)} \left[1 - c_0 N^{p\left(\delta - \frac{1}{2}\right)} \right], \end{aligned}$$

Из произвольности числа δ имеем

$$\int_I |S_N(x, f_0)|^p dx > \text{const} N^{p\left(\frac{m-1}{2} - \alpha\right)}.$$

Теорема 1 доказана.

В связи с теоремой 1 возникает вопрос: существует ли измери-

мое множество $E \subset I$, $0 < |E| < 1$, такое, чтобы путем изменения значений разлагаемой функции $f(x)$ вне множества E получить новую функцию $F(x)$, сферические частичные суммы кратного ряда Фурье которой сходились в метрике L^p , $0 < p < 1$?

Отметим, что в случае прямоугольных частичных сумм этот вопрос положительно решен автором в работе (4) и использованный метод не позволяет выяснить справедливость полученного результата для сферических частичных сумм.

Применяя метод, отличный от метода, использованного в работе (4), можно доказать следующую теорему, являющуюся положительным ответом на поставленный вопрос.

Теорема 3. Пусть $Q_k \subset \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$, $k=1, \dots, m$, совершенные нигде не плотные множества.

Тогда для любой функции $f(x) \in L(I)$ существует функция $F(x) \in L(I)$ такая, что $F(x) = f(x)$ на $Q = \prod_{k=1}^m Q_k$ и сферические частичные суммы кратного ряда Фурье вновь полученной функции $F(x)$ сходятся к ней в метрике L^p , $0 < p < 1$, т. е.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_I \left| \sum_{|n| \leq R} a_n(F) e^{2\pi i n x} - F(x) \right|^p dx = 0.$$

Основным средством для доказательства теоремы 3 является следующая

Лемма. Пусть даны $Q_k \subset \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$, $k=1 \dots m$, совершенные нигде не плотные множества, функция $f(x) \in L(I)$, числа $N > 1$, $0 < p < 1$, $\epsilon > 0$.

Тогда существуют функция $g(x) \in L(I)$ и тригонометрический полином вида

$$H(x) = \sum_{N < |n| \leq M} c_n e^{2\pi i n x},$$

которые удовлетворяют условиям:

$$1) g(x) = f(x), \text{ при } x \in Q = \prod_{k=1}^m Q_k;$$

$$2) \int_I |g(x)| dx < 4 \int_I |f(x)| dx;$$

$$3) \int_I |g(x) - H(x)| dx < \epsilon,$$

$$4) \int_I \left| \sum_{N < |n| < R} c_n e^{2\pi i n x} \right|^p dx < \epsilon + \int_I |g(x)|^p dx, \quad N < R \leq M.$$

Ինտեգրելի ֆունկցիաների Ֆուրյեի բազմապատիկ շարքերի սֆերիկ մասնական գումարների L^p , $0 < p < 1$, մետրիկայով զուգամիտության մասին

Ապացուցվում են հետևյալ թեորեմները.

Թեորեմ 1. Գոյություն ունի $f_0(x) \in L(I)$; $I = \{x = (x_1, \dots, x_m), |x_j| < \frac{1}{2}\}$ այնպիսին, որի Ֆուրյեի բազմապատիկ շարքի սֆերիկ մասնական գումարները L^p , $0 < p < 1$ մետրիկայով տարամիտում են:

Թեորեմ 2. Եթե $Q_k \subset \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, $k = 1, 2, \dots, m$ ամենուրեք նուրբ կատարյալ բազմություններ են, ուստի ցանկացած $f(x) \in L(I)$ կարելի է փոխել $Q = \prod_{k=1}^m Q_k$ -ից դուրս այնպես, որ նոր ստացված $F(x)$ ֆունկցիայի Ֆուրյեի բազմապատիկ շարքի սֆերիկ մասնական գումարները L^p , $0 < p < 1$, մետրիկայով զուգամիտեն իրեն:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Н. К. Бари, Тригонометрические ряды, Физматгиз, М., 1961. ² К. И. Бабенко, О сходимости в среднем кратных рядов Фурье и асимптотике ядра Дирихле сферических средних, Препринт, Ин-т. прикладной математики АН СССР, М., 1971. ³ И. Стейн, Г. Вейс, Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах, Мир, М., 1974 г. ⁴ М. Ж. Григорян, Изв. АН АрмССР, сер. мат., т. 15, № 1, (1980):