ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXIII 1981 2

УДК 51.01 : 518.5

МАТЕМАТИКА

М. Ю. Ходжаянц

e-степени, T-степени и аксиоматические теории

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 27/II 1981)

Настоящая работа посвящена изучению связей между e-степенями, степенями неразрешимости и аксиоматическими теориями. В ней приводятся краткие доказательства двух следующих теорем:

1. *Внутри каждой Т-степени* $\geqslant 0^{(2)}$ *содержится некоторая е-степень.*

2. *е-степень тотальна (т. е. содержит график некоторой всюду определенной функции) тогда и только тогда, когда она содержит некоторую теорию.*

Мы будем пользоваться терминологией и понятиями, введенными в ([1-3]).

Пусть Φ—нумерация операторов перечисления ([1]). Через A^e обозначим множество $\{\langle x, n\rangle | x\in\Phi_n[A]\}$. Очевидно, что

$$\forall B(A^e\leqslant_T B\Leftrightarrow\forall n(\Phi_n[A]\leqslant_T B)).$$

Через Q_s обозначим множество $\{u | \langle k, u\rangle\in W_n\}$, где $s=\langle k, n\rangle$.

Теорема 1. $\forall C(\varnothing^{(2)}\leqslant_T C\supset\exists A(d_e(A)\subseteq d_T(C)))$.

Доказательство. Пусть $\varnothing^{(2)}\leqslant_T C$. Нам достаточно построить множество A, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $A\equiv_T C$;

2) $\forall n(A\leqslant_e\Phi_n[A]\supset A\leqslant_T\Phi_n[A])$;

3) $A^e\leqslant_T A$.

Построение множества A будет производиться по шагам. Параллельно мы будем строить вспомогательное множество B такое, что $B\subseteq\overline{A}$. Для любого шага s множества A_s и B_s, полученные на этом шаге, должны быть рекурсивными и удовлетворять условиям: $A_{s-1}\subseteq A_s$ и $B_{s-1}\subseteq B_s$.

Шаг 0. $A_0=B_0=\varnothing$. Переходим к шагу 1.

Шаг $s+1$. Пусть $s=\langle k, n\rangle$. Через $a_s^{(i)}$ обозначим i-ое по возрастанию число, не принадлежащее $A_s\cup B_s$.

Подшаг 1. Проверяем, выполняется ли условие

$$\exists m \exists l (m \notin A_s \& D_l \cap B_s = \varnothing \& m \in \Phi_k \Phi_n [D_l] \& m \notin D_l). \tag{1}$$

Если существуют числа, удовлетворяющие этому условию, то мы можем перечислить их каким-либо заранее фиксированным способом. Пусть $\langle m_0, l_0 \rangle$—первая пара при этом перечислении.

Тогда, если $m_0 = a_s^{(0)}$, то $A_s^{(3)} = A_s \cup D_{l_0} \cup \{a_s^{(1)}\}$, $B_s^{(3)} = B_s \cup \{a_s^{(0)}\}$.

Если $m_0 = a_s^{(1)}$, то $A_s^{(3)} = A_s \cup D_{l_0} \cup \{a_s^{(0)}\}$, $B_s^{(3)} = B_s \cup \{a_s^{(1)}\}$.

Если $m_0 \neq a_s^{(0)}, a_s^{(1)}$, то $A_s^{(3)} = A_s \cup D_{l_0} \cup \{a_s^{(0)}, a_s^{(1)}\}$, $B_s^{(3)} = B_s \cup \{m_0\}$.

Переходим к подшагу 4.

Допустим, что чисел, удовлетворяющих условию (1), не существует, т. е.

$$\forall m \forall l (m \notin A_s \& D_l \cap B_s = \varnothing \& m \in \Phi_k \Phi_n [D_l] \supset m D_l). \tag{2}$$

Тогда

$$A_s^{(1)} = A_s, \ B_s^{(1)} = B_s \cup \{a_s^{(0)}, a_s^{(1)}\}.$$

Заметим, что (2) верно и для $A_s^{(1)}$ и $B_s^{(1)}$. Переходим к подшагу 2.

П о д ш а г 2. Проверяем, выполняется ли условие

$$\exists p \forall^{=} t (D_p \cap A_s^{(1)} = \varnothing \& (t \notin A_s^{(1)} \supset \forall u (t \in \Phi_k \Phi_n [D_u] \supset D_u \cap (D_p \cup B_s^{(1)}) \neq \varnothing))). \tag{3}$$

Пусть p_0—наименьшее число, удовлетворяющее условию (3).

Берем $A_s^{(3)} = A_s^{(1)} \cup \{a_s^{(p_0+3)}\}$, $B_s^{(3)} = B_s^{(1)} \cup D_{p_0} \cup \{a_s^{(2)}, \ldots a_s^{(p_0+2)}\}$

и переходим к подшагу 4.

Допустим, что такого числа не существует, т. е.

$$\forall p \exists^{=} t (D_p \cap A_s^{(1)} = \varnothing \supset (t \notin A_s^{(1)} \& \exists u (t \in \Phi_k \Phi_n [D_u] \& D_u \cap (D_p \cup B_s^{(1)}) = \varnothing))). \tag{4}$$

В этом случае $A_s^{(2)} = A_s^{(1)} \cup \{a_s^{(2)}\}$, $B_s^{(2)} = B_s^{(1)}$. Переходим к подшагу 3. Заметим, что (2) и (4) выполняются и для $A_s^{(2)}$ и $B_s^{(2)}$.

П о д ш а г 3. Некоторым фиксированным способом выбираем рекурсивную последовательность $\{\langle z_l, u_l \rangle\}$ со следующими свойствами:

1) $z_l \in \Phi_k \Phi_n [D_{u_l}]$;
2) $z_l \notin A_s^{(2)}$;
3) $D_{u_l} \cap B_s^{(2)} = \varnothing$;
4) $z_l \notin D_{u_l}$;
5) $\max D_{u_l} < \min D_{u_{l+1}}$.

Существование такой последовательности следует из (2) и (4).

$$A_s^{(3)} = A_s^{(2)} \cup (\bigcup_l D_{u_l} - \{z_0, z_1, \ldots\}).$$

$$B_s^{(3)} = N - A_s^{(2)} \cup (\bigcup_l D_{u_l}).$$

Переходим к подшагу 4.

П о д ш а г 4. Пусть $b_s^{(i)}$—i-ое по возрастанию число, не принадлежащее $A_s^{(3)} \cup B_s^{(3)}$.

Рассмотрим множество Q_s. Пусть Q_s бесконечно. Начинаем перечислять числа, удовлетворяющие условию $\exists l(l \in Q_s \& D_l \cap B_s^{(3)} = \varnothing)$. Пусть l_0—первое число в этом пересчете. Положим

$$A_s^{(4)} = A_s^{(3)} \cup D_{l_0} \cup \{b_s^{(0)},\ b_s^{(1)}\},\ B_s^{(4)} = B_s^{(3)}.$$

Переходим к подшагу 5.

Если таких чисел не существует, то берем $A_s^{(4)} = A_s^{(3)} \cup \{b_s^{(0)}\}$, $B_s^{(4)} = B_s^{(3)} \cup \{b_s^{(1)}\}$ и переходим к подшагу 5.

Допустим, что Q_s конечно и $|Q_s| = t$. В этом случае берем

$$A_s^{(4)} = A_s^{(3)} \cup \{b_s^{(t+2)}\},\ B_s^{(4)} = B_s^{(3)} \cup \{b_s^{(0)},\ b_s^{(1)}, \ldots,\ b_s^{(t+1)}\}$$

и переходим к подшагу 5.

Подшаг 5. Пусть c—наименьшее число, не принадлежащее $A_s^{(4)} \cup B_s^{(4)}$.

Если $s \in C$, то $A_{s+1} = A_s^{(4)} \cup \{c\}$, $B_{s+1} = B_s^{(4)}$.

Если $s \notin C$, то $A_{s+1} = A_s^{(4)}$, $B_{s+1} = B_s^{(4)} \cup \{c\}$.

Переходим к шагу $s+2$.

Возьмем $A = \bigcup\limits_s A_s$ и покажем, что оно удовлетворяет требуемым свойствам. Так как все условия, проверяемые при построении, имеют степень $\leqslant_T \varnothing^{(2)}$, а $\varnothing^{(2)} \leqslant_T C$, то, используя C, мы сможем породить A_s и B_s для любого s. Поскольку любое число на каком-либо шаге попадает либо в A_s, либо в B_s, то мы можем таким образом распознать, принадлежит ли это число множеству A или не принадлежит. Следовательно, $A \leqslant_T C$.

С другой стороны, вся информация о построении множества A закодирована в самом множестве A так, что, задав конечное число вопросов о принадлежности элементов этому множеству, мы сможем проследить это построение до любого шага s. Тем самым, во-первых, мы сможем распознать принадлежность любого числа множеству C, т. е. разрешить C относительно A, и, во-вторых, получив всю информацию об интересующем нас операторе перечисления, сможем разрешить множество A^e. Таким образом, $C \equiv_T A$ и $A^e \leqslant_T A$. Пункт 2 доказывается так же, как и в теореме 1 из ([4]). Теорема доказана.

В ([4]) была введена eT-сводимость и изучались некоторые свойства eT-степеней. Напомним, что

$$A \leqslant_{eT} B \Leftrightarrow A \leqslant_e B \& A \leqslant_T B.$$

Следствие 1. *Существует несчетное множество e-степеней, состоящих из одной eT-степени.*

Для доказательства следующей теоремы нам понадобятся некоторые свойства тотальных e-степеней, а именно:

(1) e-степень $\boldsymbol{a}$ является тотальной тогда и только тогда, когда существует множество $A \in \boldsymbol{a}$ такое, что $\overline{A} \leqslant A_e$.

(2) Пусть $\boldsymbol{a}$—тотальная e-степень и множество A обладает свойствами из пункта (1). Тогда $\forall B(B \in \boldsymbol{a} \Leftrightarrow B$ рекурсивно перечислимо

относительно $A\&A\leqslant_e B$). В дальнейшем при рассмотрении теорий мы будем отождествлять формулы языков этих теорий с их номерами, как это делается, например, в [1]. Для всякого числа x через $\neg x$ обозначим номер отрицания формулы с номером x.

Теорема 2. *e-степень $\mathbf{a}$ является тотальной тогда и только тогда, когда в ней содержится некоторая полная теория.*

Доказательство. Достаточность. Пусть $T\in\mathbf{a}$—полная теория. Тогда $x\in\overline{T}\Leftrightarrow\neg x\in T$, т. е. $\overline{T}\leqslant_e T$. Отсюда, согласно (1), $\mathbf{a}$ является тотальной.

Необходимость. Пусть $\mathbf{a}$—тотальная e-степень, $A\in\mathbf{a}$ и $\overline{A}\leqslant_e A$. Мы построим полную теорию T, рекурсивно перечислимую относительно A и такую, что $A\leqslant_e T$. Таким образом, T будет принадлежать $\mathbf{a}$ согласно (2).

Рассмотрим следующий язык L:

0, 1, ... n, ...—символы констант;

x, x_1, ...—предметные переменные;

P—одноместный предикатный символ;

$\neg$, $\&$, V—логические связки;

$\forall$, $\exists$—кванторы.

Определим модель $\mathfrak{M}$ языка L следующим образом.

$M=\{m_0, m_1\}$—универсум модели.

ν—интерпретирующее отображение, ставящее в соответствие:

$$\text{каждому константному символу } n-\begin{cases} m_0, & \text{если } n\in A \\ m_1, & \text{если } n\notin A \end{cases}$$

предикатному символу P—отношение P' на множестве M такое, что $P'=\{m_0\}$.

Термы, формулы языка L, а также истинность формул языка L в модели $\mathfrak{M}$ определяются обычным образом.

Возьмем в качестве T множество формул языка L, истинных в модели $\mathfrak{M}$. Очевидно, что T рекурсивно перечислимо относительно A и является полной теорией. А так как $n\in A\Leftrightarrow P(n)\in T$ для всякого n, то и $A\leqslant_e T$.

Теорема доказана.

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР
и Ереванского государственного университета

Մ. Յու. ԽՈՋԱՅԱՆՑ

e-աստիճաններ, T-աստիճաններ և աքսիոմատիկ տեսություններ

Հոդվածը նվիրված է թվելիության աստիճանների (e-աստիճանների), անլուծելիության աստիճանների (T-աստիճանների) և աքսիոմատիկ տեսությունների միջև եղած հարաբերությունների հետազոտմանը։

Ստացված են հետևյալ արդյունքները.

1. $\varnothing^{(2)}$-ից բարձր կամայական T-աստիճանը պարունակում է որևէ e-աստիճանի բոլոր բազմությունները։

Այստեղից հետևում է, որ գոյություն ունի այնպիսի e-աստիճանների անհաշվելի բազմություն, որոնք կազմված են մեկական eT-աստիճաններից (eT —հանգեցումը ներմուծված է ([4])-ում)։

2. Կամայական e-աստիճանը տոտալ է այն և միայն այն դեպքում, երբ այն պարունակում է որևէ լրիվ աքսիոմատիկ տեսություն։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Х. Роджерс,* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, М., Мир, 1972. [2] *Е. А. Поляков, М. Г. Розинас,* Теория алгоритмов, Иваново, 1976. [3] *Г. Кейслер, Ч. Ч. Чэн,* Теория моделей, Мир, М., 1977. [4] *М. Ю. Ходжаянц,* Изв. АН АрмССР. Математика, т. 15, № 3 (1980).