

УДК 51.01.518.5

МАТЕМАТИКА

О. С. Асатрян

Две теоремы о bT сводимости

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 27/II 1981)

В данной статье изучается тьюринговая сводимость (T) в классе всех рекурсивно-перечислимых (р. п.) множеств. Вводятся понятия ограничено-тьюринговой (bT) сводимости и bT -креативности и доказывается, что в этом классе T - и bT -сводимости, а также T - и bT -креативности совпадают. Все хорошо известные понятия, используемые в изложении, можно найти в ⁽¹⁾.

Определение. Если α и β р. п. множества, то α bT сводится к β , если существует о. р. ф. h такая, что

$$1) \quad \forall x [x \in \bar{\alpha} \Leftrightarrow \forall y [y \in W_{h(x)} \Rightarrow Dy \cap \bar{\beta} \neq \emptyset]] \quad (1)$$

и

$$2) \quad \forall x [|W_{h(x)}| < \infty],$$

где $|\alpha|$ — мощность множества α .

Теорема 1. Если α и β р. п. множества, то $\alpha \leq_T \beta \Leftrightarrow \alpha \leq_{bT} \beta$.

Доказательство. В одну сторону очевидно. Предположим, что α, β р. п. множества $\alpha \leq'_T \beta$, и покажем, что $\alpha \leq_{bT} \beta$. Известно ⁽¹⁾, что, если $\alpha \leq'_T \beta$, то α и β находятся в соотношении (1) с функцией f вместо h .

Пусть $W_{f(x)}^n$, α^n и β^n конечные подмножества $W_{f(x)}$, α и β соответственно, перечисленные за n шагов некоторых перечислений и такие, что $W_{f(x)} = \bigcup_n W_{f(x)}^n$, $\alpha = \bigcup_n \alpha^n$ и $\beta = \bigcup_n \beta^n$. Для каждого $x \in N$ по шагам n будем строить последовательность конечных множеств $\gamma_x^0 \subseteq \gamma_x^1 \subseteq \dots \subseteq \gamma_x^n \subseteq \dots$ такую, что $\forall x \forall n [\gamma_x^n \subseteq W_{f(x)}]$ и о. р. ф. h , определенная как $W_{h(x)} = \bigcup_n \gamma_x^n$, обладает тем свойством, что $\forall x [|W_{h(x)}| < \infty]$ и $\alpha \leq_h \beta$. Это и будет означать, что $\alpha \leq_{bT} \beta$.

Шаг 0. Для всех x и $n \leq x$ положим $\gamma_x^n = \emptyset$.

Шаг $n+1$. Предположим, что γ_x^n , $W_{f(x)}^n$, α^n , β^n определены для всех x , $x \leq n+1$. Выпишем следующие условия:

$$1) x \in \alpha^{n+1};$$

$$2) \exists u [u \in \gamma_x^n \& D_u \cap \beta^{n+1} = \emptyset]$$

и для каждого $x \leq n+1$, проверяя выполнимость условий 1.2, будем строить γ_x^{n+1} описанной ниже инструкцией.

Инструкция. Пусть x фиксированное число и $x \leq n+1$. Проверяем, выполняется ли 1) для x . Если да, то определим $\gamma_x^{n+1} = \gamma_x^n$ и переходим к шагу $n+2$, в противном случае проверяем выполнимость условия 2).

Если 2) выполняется для x , то определим $\gamma_x^{n+1} = \gamma_x^n$ и перейдем к шагу $n+2$. В противном случае пусть u_0 наименьшее число из $W_{f(x)}^{n+1} \setminus \gamma_x^n$; положим $\gamma_x^{n+1} = \gamma_x^n \cup \{u_0\}$ и перейдем к шагу $n+2$.

Описание инструкции закончено.

Определим $\gamma_x = \bigcup \gamma_x^n$. Так как в γ_x^n добавляются числа только из $W_{f(x)}^n$, то для всех $x \in N$ $\gamma_x \subseteq W_{f(x)}$. Очевидно также, что постовский номер γ_x находится некоторой о. р. ф. $h(x)$, т. е. $\forall x [W_{h(x)} = \gamma_x]$.

Покажем, что $\forall x [|W_{h(x)}| < \infty] \& \alpha \leq_h \beta$, т. е. $\alpha \leq_h \beta$.

Пусть $x \in \alpha$ и n_0 наименьший шаг такой, что $x \in \alpha^{n_0}$. Тогда в силу условия 1) инструкции $\forall n [n_0 < n \Rightarrow \gamma_x^n = \gamma_x^{n_0}]$. Поэтому $|W_{h(x)}| < \infty$. С другой стороны

$$x \in \alpha \Rightarrow \forall u [u \in W_{h(x)} \Rightarrow D_u \cap \beta \neq \emptyset].$$

Так как $W_{h(x)} \subset W_{f(x)}$, то верно и

$$x \in \alpha \Rightarrow \forall u [u \in W_{h(x)} \Rightarrow D_u \cap \beta \neq \emptyset].$$

Пусть теперь $x \in \bar{\alpha}$; тогда из того, что $\alpha \leq_h' \beta$, имеем

$$x \in \bar{\alpha} \Rightarrow \exists u [u \in W_{f(x)} \& D_u \cap \beta = \emptyset].$$

Поэтому существует единственный шаг n_0 такой, что $W_{f(x)}^{n_0} \setminus \gamma_x^{n_0-1} \neq \emptyset$ и для $u_0 = \min\{W_{f(x)}^{n_0} \setminus \gamma_x^{n_0-1}\}$ выполнены следующие два условия:

$$a) D_{u_0} \cap \beta = \emptyset;$$

$$b) \forall u [u \in \gamma_x^{n_0-1} \Rightarrow D_u \cap (N \setminus \beta^{n_0-1}) \neq \emptyset].$$

В существовании такого шага легко убедиться. Тогда на конце шага n_0 $\gamma_x^{n_0} = \gamma_x^{n_0-1} \cup \{u_0\}$ и верно следующее утверждение:

$$\forall n [n_0 \leq n \Rightarrow \gamma_x^n = \gamma_x^{n_0} \& u_0 \in \gamma_x^n \& D_{u_0} \cap \beta^n = \emptyset].$$

Поэтому

$$x \in \bar{\alpha} \Rightarrow \exists u [u \in W_{h(x)} \& D_u \cap \beta = \emptyset] \& |W_{h(x)}| < \infty.$$

Теорема доказана.

Замечание. Из построения множеств γ_x^n видно, что $x \in \bar{a} \Rightarrow$ существует единственное число u_0 такое, что $u_0 \in W_{h(x)} \& D_{u_0} \cap \beta = \emptyset$.

Теорема 2. Р. п. множество β T -креативно тогда и только тогда, когда β bT -креативно.

Доказательство. В одну сторону очевидно. Покажем, что если β T -креативно, то β bT -креативно. По определению р. п. β T -креативно, если существует о. р. ф. g такая, что

$$\forall u [u \in W_{g(x)} \Rightarrow D_u \not\subset \bar{\beta}] \Leftrightarrow \exists u [u \in W_{g(x)} \& D_u \subset W_x]. \quad (3)$$

Легко убедиться, что для любого $x \in N$ верно одно и только одно из следующих двух утверждений:

$$\exists u [u \in W_{g(x)} \& D_u \subset W_x]; \quad (a)$$

$$\exists u [u \in W_{g(x)} \& D_u \cap \beta = \emptyset]. \quad (b)$$

Заметим также, что

$$\forall x [W_{g(x)} \neq \emptyset]. \quad (4)$$

так как в противном случае (3) превращается в противоречивое утверждение.

Доказательство теоремы будет проводиться по шагам. Пусть β^n , W_x^n и $W_{g(x)}^n$ конечные подмножества, перечисленные к шагу n в соответствующих множествах β , W_x и $W_{g(x)}$. На каждом шаге n для всех x , $(x \leq n)$ будут построены конечные множества γ_x^n такие, что для всех x , $n \in N$ $\gamma_x^n \subseteq \gamma_x^{n+1}$ и функция $h(x)$, определенная как $W_{h(x)} = \bigcup_n \gamma_x^n$, будет функцией bT -креативности β . А именно $h(x)$ удовлетворяет (3) вместо g и $\forall x [|W_{h(x)}| < \infty]$.

Для всех $n \in N$ обозначим следующие семейства предикатов:

$$\exists u [u \in \gamma_x^n \& D_u \subset W_x^{n+1}] \quad (a_n);$$

$$\exists u [u \in \gamma_x^n \& D_u \subset N \setminus \beta^{n+1}] \quad (b_n).$$

Шаг 0. Для всех $x \in N$ поместим в γ_x^0 первый элемент, вычисленный в $W_{g(x)}$. По замечанию (4) $\forall x [\gamma_x^0 \neq \emptyset]$.

Шаг $n+1$. Пусть γ_x^n , β^{n+1} , W_x^{n+1} и $W_{g(x)}^{n+1}$ определены к шагу $n+1$. Для каждого $x \leq n+1$ определим γ_x^{n+1} , выполняя предписания следующей инструкции.

Проверяем, истинен ли предикат (a_n) . Если да, то $\gamma_x^{n+1} = \gamma_x^n$, переходим к шагу $n+2$, в противном случае проверяем, истинен ли предикат (b_n) . Если да, то $\gamma_x^{n+1} = \gamma_x^n$, переходим к шагу $n+2$, в противном случае находим наименьшее число u_0 из $W_{g(x)}^{n+1} \setminus \gamma_x^n$, если такое существует, определяем $\gamma_x^{n+1} = \gamma_x^n \cup \{u_0\}$ (если не найдется u_0 , то $\gamma_x^{n+1} = \gamma_x^n$) и переходим к шагу $n+2$. Описание инструкции окончено.

Определим о. р. ф. $h(x)$ как

$$W_{h(x)} = \bigcup_n \gamma_x^n. \quad (5)$$

Пусть A и B обозначают левую и, соответственно, правую части эквивалентности (3). Сначала мы докажем, что $A \& B$ истинна с функцией h вместо g и $|W_{h(x)}| < \infty$ для x , удовлетворяющих (a). А затем для x , удовлетворяющих (b), покажем, что $\sim A \& \sim B$ истинна с функцией h вместо g и $|W_{h(x)}| < \infty$. Тем самым в силу замечания об (a) и (b) будет установлена эквивалентность (3) для функции h такой, что $\forall x[|W_{h(x)}| < \infty]$. Заметим, что $\forall x \forall n[\gamma_x^n \subset W_{g(x)}]$. Это очевидно.

Пусть x удовлетворяет (a). Тогда множество

$$I \Leftarrow \{u / u \in W_{g(x)} \& D_u \subset W_x\} \neq \emptyset.$$

Покажем, что хотя бы одно число $u_0 \in I$ будет помещено в γ_x^n на некотором шаге n .

Предположим противное, т. е.

$$\forall n \forall u [u \in I \Rightarrow u \notin \gamma_x^n].$$

Так как $\forall n[\gamma_x^n \neq \emptyset]$, то из того, что

$$\forall n \forall u [u \in \gamma_x^n \Rightarrow D_u \not\subset W_x],$$

следует

$$\forall n \forall u [u \in \gamma_x^n \Rightarrow D_u \not\subset W_x^{n+1}].$$

Тогда для всех n (a_n) не выполняется для x и предписания инструкции обязывать переходить к проверке условия (b_n) на каждом шаге n . Так как x удовлетворяет (a), то из (3) имеем

$$\forall u [u \in W_{g(x)} \Rightarrow D_u \cap \beta \neq \emptyset].$$

Поэтому

$$\forall n \forall u [|u \in \gamma_x^n \& D_u \subset N \setminus \beta^{n+1}| \Rightarrow \exists n' [n' > n \& D_u \not\subset N \setminus \beta^{n'+1}],$$

т. е. на бесконечном числе шагов $n' + 1$ x не удовлетворяет также условиям ($b_{n'}$). Поэтому согласно инструкции мы вынуждены добавлять новые числа u' из $W_{g(x)}^{n'+1}$ в $\gamma_x^{n'+1}$, не затрагивая чисел из I . Но этого не может быть в силу выбора чисел $u' = \min \{W_{g(x)}^{n'+1} \setminus \gamma_x^{n'}\}$. Получили противоречие. Поэтому хотя бы одно число из I будет помещено в γ_x .

Пусть $n_0 \in I$ первое число, помещенное в $\gamma_{x_0}^{n_0}$, где n_0 номер наименьшего такого шага. Очевидно из инструкции, что

$$\forall n [n_0 \leq n \Rightarrow \gamma_x^n = \gamma_{x_0}^{n_0} \& u_0 \in \gamma_x^n \& D_{u_0} \subset W_x^n].$$

Поэтому $|W_{h(x)}| < \infty \& \exists u [u \in W_{h(x)} \& D_u \subset W_x]$,

и ясно, что в $W_{h(x)}$ попадает только одно число u_0 из I .

Покажем теперь, что

$$\forall u[u \in W_{h(x)} \Rightarrow D_u \cap \beta \neq \emptyset].$$

Предположим противное, т. е. $\exists u[u \in W_{h(x)} \& D_u \cap \beta = \emptyset]$. Так как $W_{h(x)} \subset W_{g(x)}$, то $\exists u[u \in W_{g(x)} \& D_u \cap \beta = \emptyset]$, тогда из (3) имеем: $\forall u[u \in W_{g(x)} \Rightarrow D_u \not\subset W_x]$. Но это противоречит выбору x в этой части доказательства. Таким образом, нами доказано:

Если x удовлетворяет (а), то $|W_{h(x)}| < \infty$ и $A \& B$ истинна для h .

Пусть x удовлетворяет (b). Тогда для всех n условия (a_n) не выполняются, так как в противном случае x удовлетворяет (а), чего не может быть в силу замечания об (а) и (b). Поэтому на каждом шаге n мы переходим к проверке условия (b_n) .

Пусть $C = \{u/u \in W_{g(x)} \& D_u \cap \beta = \emptyset\}$. Ясно, что C непустое множество. Поэтому существует число n_0 такое, что для некоторого $u_0 \in C$ выполнены следующие условия:

$$u_0 = \min \{ W_{g(x)}^{n_0+1} \setminus \gamma_x^{n_0} \} \& \forall u[u \in \gamma_x^{n_0} \Rightarrow D_u \not\subset N \setminus \beta^{n_0+1}].$$

Тогда на шаге n_0+1 и (b_{n_0}) не выполняется. Поэтому в конце этого шага u_0 будет помещен в $\gamma_x^{n_0+1}$ и очевидно, что

$$\forall n[n_0+1 \leq n \Rightarrow \gamma_x^n = \gamma_x^{n_0+1} \& u_0 \in \gamma_x^n \& D_{u_0} \subset N \setminus \beta^{n+1}].$$

Это означает, что $|W_{h(x)}| < \infty$ и $\exists u[u \in W_{h(x)} \& D_u \subset \bar{\beta}]$. Покажем теперь, что $\forall u[u \in W_{h(x)} \Rightarrow D_u \not\subset W_x]$. Опять предположим противное, т. е. $\exists u[u \in W_{h(x)} \& D_u \subset W_x]$. Так как $W_{h(x)} \subset W_{g(x)}$, то $\exists u[u \in W_{g(x)} \& D_u \subset W_x]$. Учитывая (3), получаем $\forall u[u \in W_{g(x)} \Rightarrow D_u \not\subset \bar{\beta}]$, а это противоречит выбору числа x , удовлетворяющему (b). Наконец мы получили $|W_{h(x)}| < \infty$ и истинность $\sim A \& \sim B$ для h .

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. $h(x)$ обладает тем свойством, что для удовлетворения (а) или (b) в $W_{h(x)}$ существует единственное число u_0 .

Вычислительный центр

Академии наук Армянской ССР

2. Ս. ԱՍԱՏՐՅԱՆ

Նրկու բեռեմ սահմանափակ թյուրինգյան բերելիության մասին

Ալգորիթմիկ բերելիություններից ամենաբնականը և ամենուրեղհանուրը թյուրինգյան բերելիությունն է: Այս հոգվածում մտցվում է բնականորեն սահմանվող սահմանափակ-թյուրինգյան բերելիության գաղափարը ոեկուրսիվ թվարկելի բազմությունների դասի համար:

Առաջին թեորեմը ապացուցում է, որ նշված դասում թյուրինգյան և սահմանափակ թյուրինգյան բերելիությունները համընկնում են:

Բացի դրանից մտցված և ուսումնասիրված է նաև բազմության սահ-

մանափակ-թյուրինգյան կրեատիվության գաղափարը Ծրկրորդ թեորեմը
ապացուցում է, որ այս գաղափարը նույնպես համընկնում է թյուրինգյան
կրեատիվության գաղափարի հետ վերոհիշյալ դասում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Х. Роджерс, Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. Мир, М., 1972.