ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXIII 1981 1

УДК 539.375

МЕХАНИКА

С. А. Назаров

О показателе сингулярности напряжений для трещины при сцеплении участков ее берегов, сгущающихся к вершинам

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 3/II 1981)

Исследованию показателя сингулярности напряжений вблизи вершин трещины или угловых вырезов, имеющему большое значение в механике разрушения, посвящено большое количество работ (см. ([1-3]) и др.). В данной заметке изучается влияние частичного закрепления берегов трещины вблизи ее концов на указанный показатель. При этом предполагается, что в логарифмическом масштабе участки сцепления берегов расположены периодически. Получены асимптотические формулы для вектора смещения и тензора напряжений. Исследуется показатель сингулярности напряжений в двух предельных случаях—когда размеры зоны сцепления исчезающе малы и когда сцепление почти полное.

Пусть Ω_0—подобласть R^2 с гладкой (класса C^∞) границей $\partial\Omega_0$, содержащая отрезок $\Gamma=\{x\in R^2: x_2=0, |x_1|\leqslant 1\}$. Положим $\Omega_1=\Omega_0\setminus\Gamma$ и обозначим через Ω_α, $\alpha\in(0, 1)$, область

$$\Omega_\alpha=\Omega_1\cup\bigcup_{n=N}^{+\infty}\Delta_n(\alpha), \tag{1}$$

где N—натуральное число, $\Delta_n(\alpha)=\{x\in R^2: n+\log(1-|x_1|)/a\in((\alpha-1)/2, (1-\alpha)/2), x_2=0\}$, $a>1$.

В области Ω_α рассмотрим задачу классической теории упругости:

$$\begin{aligned} &\Delta\mathbf{u}+(1-2\nu)^{-1}\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}=0 \quad \text{в} \quad \Omega_\alpha, \\ &\sigma_{12}(\mathbf{u})=\sigma_{22}(\mathbf{u})=0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega_\alpha\setminus\partial\Omega_0, \\ &\mathbf{u}=\psi \quad \text{на} \quad \partial\Omega_0, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\mathbf{u}$—вектор смещений, $\sigma_{ij}(\mathbf{u})$—компоненты тензора напряжений, ψ—заданное на внешней границе смещение. Исследуем асимптотику вблизи точек $(\pm 1, 0)$ решения задачи (2). Достаточно ограничиться левым концом $(-1, 0)$ трещины. Введем полярные координаты (r, θ) с центром в $(-1, 0)$ так, чтобы верхний и нижний берега разреза задавались уравнениями $\theta=\pm 0$.

Как и в ([1–3]), для рассматриваемой задачи показатели в асимптотике $\mathbf{u}$ при $r\to 0$ являются собственными числами некоторой краевой задачи с комплексным параметром. В случае угловых точек это краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения. Здесь же возникает краевая задача в прямоугольнике с разрезом.

Введем множества $K=\{(t, \theta): t\in(-a/2,\ a/2),\ \theta\in(-\pi, \pi)\}$ и $T_\alpha=\{(t, \theta): t/(1-\alpha)\in[-a/2,\ a/2],\ \theta=0\}$ и рассмотрим краевую задачу

$$\left\{\left(\lambda+\frac{\partial}{\partial t}\right)\Xi_{tt}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\lambda,\ \frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\Xi_{t\theta}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\lambda,\ \frac{\partial}{\partial\theta}\right)-\Xi_{\theta\theta}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\lambda,\ \frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right\}\mathbf{U}=0,$$

$$\left\{\left(1+\lambda+\frac{\partial}{\partial t}\right)\Xi_{t\theta}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\lambda,\ \frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\Xi_{\theta\theta}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\lambda,\ \frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right\}\mathbf{U}=0 \quad \text{в} \quad K\setminus T_\alpha,$$

$$\Xi_{t\theta}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\lambda,\ \frac{\partial}{\partial\theta}\right)\mathbf{U}=\Xi_{\theta\theta}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\lambda,\ \frac{\partial}{\partial\theta}\right)\mathbf{U}=0 \quad \text{на} \quad T_\alpha. \tag{3}$$

Вектор $\mathbf{U}=(U_1,\ U_2)$ удовлетворяет также условиям периодичности на сторонах прямоугольника K. В (3) дифференциальные операторы Ξ_{pq} задаются равенствами

$$\Xi_{tt}\left(\frac{\partial}{\partial t},\ \frac{\partial}{\partial\theta}\right)\mathbf{U}=\frac{E}{1+\nu}\left\{\frac{\partial U_1}{\partial t}+\frac{\nu}{1-2\nu}\left(\frac{\partial U_1}{\partial t}+\frac{\partial U_2}{\partial\theta}+U_1\right)\right\},$$

$$\Xi_{\theta\theta}\left(\frac{\partial}{\partial t},\ \frac{\partial}{\partial\theta}\right)\mathbf{U}=\frac{E}{1+\nu}\left\{\frac{\partial U_2}{\partial t}+U_1+\frac{\nu}{1-2\nu}\left(\frac{\partial U_1}{\partial t}+\frac{\partial U_2}{\partial\theta}+U_1\right)\right\},$$

$$\Xi_{t\theta}\left(\frac{\partial}{\partial t},\ \frac{\partial}{\partial\theta}\right)\mathbf{U}=\frac{E}{2(1+\nu)}\left\{\frac{\partial U_2}{\partial t}+\frac{\partial U_1}{\partial\theta}-U_2\right\}. \tag{4}$$

Вектор $\mathbf{U}$ имеет смысл вектора смещений, записанного в координатах $(t, \theta)=(\log r, \theta)$, а правые части выражений (4), умноженные на $\exp(-t)$, — компонент тензора напряжений в этих же координатах.

Теорема 1. *Собственные значения краевой задачи* (3) *являются изолированными значениями на комплексной плоскости и образуют периодическое вдоль мнимой оси семейство точек с периодом* $2\pi a$ (*т. е. числа* λ *и* $\lambda+2\pi a i$ *являются собственными одновременно*).

Обозначим указанные собственные числа, лежащие в полуполосе $\{\lambda\in C: \mathrm{Re}\,\lambda>0,\ \mathrm{Im}\,\lambda\in[0, 2\pi a)\}$, через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$; $\mathrm{Re}\,\lambda_{j+1}\geqslant\mathrm{Re}\,\lambda_j$. Пусть еще $\Phi_j^{(1,0)}, \ldots, \Phi_j^{(\varkappa_j,0)}$ — собственные, а $\{\Phi_j^{(1,k)}\}_{k=1}^{\chi_{j1}}, \ldots, \{\Phi_j^{(\varkappa_j,k)}\}_{k=1}^{\chi_{j\varkappa_j}}$ — присоединенные векторы краевой задачи (3), соответствующие собственному числу λ_j. Будем считать, что эти векторы образуют канонические жордановы цепочки.

Теорема 2. *Для энергетического решения* $\mathbf{u}\in W_2^1(\Omega_\alpha)$ *задачи* (2) *справедлива асимптотическая формула*

$$(u_r,\ u_\theta)(r, \theta)=\mathbf{u}^{(M)}(r, \theta)+c_1\zeta(x)(\cos\theta,\ -\sin\theta)+c_2\zeta(x)(\sin\theta,\ \cos\theta)+$$

$$+\zeta(x)\sum_{j=1}^{M} r^{\lambda_j}\sum_{q=1}^{\varkappa_j}\sum_{s=0}^{\chi_{jq}}\sum_{k=0}^{s}\frac{c_{s,k}^{(j,q)}}{k!}(\log r)^k\,\Phi_j^{(q,s-k)}(\log r,\ \theta).$$

Здесь c_1, c_2, $c_{s,k}^{(l,q)}$*—постоянные, зависящие от* ψ; ζ*—функция из* $C_0^\infty(R^2)$, *равная единице в малой окрестности точки* $(-1, 0)$; *функции* $\Phi_l^{(q,p)}(t, \theta)$ *считаются продолженными по периодичности на все значения переменной* t; M*—произвольное натуральное число;* (u_r, u_θ)*—вектор перемещений, записанный в полярных координатах; для вектора* $\mathbf{u}^{(M)}$ *при любом положительном* δ *конечен интеграл*

$$\int_{\Omega_\alpha} r^{2(\delta-\operatorname{Re}\lambda_M)}(|\nabla \mathbf{u}^{(M)}|^2 + r^{-2}|\mathbf{u}^{(M)}|^2)\,dxdy.$$

Из приведенной теоремы вытекает, что порядок Λ сингулярности напряжений в точках $(\pm 1, 0)$ имеет значение $\operatorname{Re}\lambda_1-1$. Его отыскание связано с нахождением собственных чисел несамосопряженной краевой задачи. Следующая теорема посвящена рассмотрению двух предельных случаев—$\alpha\to 0$ и $\alpha\to 1$, что соответствует исчезающе малым размерам зоны сцепления и почти полному склеиванию берегов. При помощи рассуждений, аналогичных приведенным в статьях [4,5] (см. также [6], где предложен общий алгорифм построения асимптотики решений эллиптических краевых задач при иррегулярном возмущении области), конструируется асимптотика Λ при $\alpha\to 0$ и $\alpha\to 1$.

Теорема 3. *Справедливы соотношения*:

$$\Lambda = -1/2 + 2(a\log(2/\alpha))^{-1} + O(|\log(\alpha/2)|^{-2}),\quad \alpha\to 0,$$

$$\Lambda = -\frac{(1-\alpha)^2 a}{32}\max\left\{\frac{\varkappa}{\varkappa^2-1}, \frac{2\varkappa+1}{\varkappa+1}\right\} + O((1-\alpha)^3),\quad \alpha\to 1.$$

Здесь $\varkappa=3-4\nu$; a, α—параметры, входящие в определение (1) области Ω_α.

Ленинградский государственный
университет им. А. А. Жданова

Ս. Ա. ՆԱԶԱՐՈՎ

Ճեղքի համար նրա ափերի տեղամասերի կցման դեպքում գագաթի մոտ խտացող լարումների եզակիության ցուցիչի մասին

Բերվում են ճեղքի գագաթի մոտ, որտեղ ափերի տեղամասերը կցված են իրար, ասիմպտոտական բանաձևեր լարումների և տեղափոխությունների համար։ Լարումների եզակիության ցուցիչը ուսումնասիրվել է երկու սահմանային դեպքերի համար, երբ ճեղքի ափերի կցման հատվածները շատ փոքր են և երբ միացումները մոտենում են ճեղքի ափերի լրիվին կցմանը։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 *M. L. Williams*, J. Appl. Mech., vol. 19, № 1 (1952). 2 *А. И. Каландия*. Прикладная математика и механика, т. 33, № 1 (1969). 3 *В. А. Дудников, Н. Ф. Морозов*, Мех. тв. тела, № 1, 1975. 4 *А. А. Самарский*, УМН, т. 5, № 3 (1950). 5 *C. A. Swanson*, Canad. Math. Bull., vol. 6, № 1 (1963). 6 *В. Г. Мазья, С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский*, ДАН СССР, т. 249, № 1 (1979).