УДК 517.948

МАТЕМАТИКА

А. О. Бабаян

**Интегральные уравнения Винера—Хопфа с вырождающимся
 символом**

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александрияном 25/II 1981)

В настоящей работе рассматривается уравнение

$$\varphi(t) - \int_0^{\infty} k(t-s)\varphi(s)ds = f(t) \quad t \geq 0 \quad (1)$$

с символом, имеющим вид

$$1 - K(i) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} k(t)e^{it}dt = \left| \frac{\lambda}{\lambda + i} \right|^a \theta(\lambda)(1 - H(\lambda)), \quad (2)$$

где $\operatorname{Re} a > 0$, $\theta(i)(1 - H(i)) \neq 0$ для всех i . $\theta(i)$ имеет вид

$$\theta(\lambda) = \begin{cases} 1 & 0 < \lambda \leq \varepsilon \\ c & -\varepsilon \leq \lambda \leq 0 \end{cases} \quad c \neq 0$$

$$\theta(\lambda) = 1 \quad |\lambda| \geq 2\varepsilon$$

при некотором ε и предполагается дифференцируемой везде, кроме точки ноль, а

$$1 - H(\lambda) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{i\tau\lambda}d\tau \quad h \in L^1(-\infty, \infty).$$

Исследование проводится в пространствах $L^p(0, \infty)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Уравнение (1) рассматривается в работах (1,2) в случае, когда символ уравнения не обращается в нуль на замкнутой вещественной оси. В работах (3-7) методом левой и правой нормализации изучается уравнение с символом, имеющим нуль целого порядка. В случае, когда символ имеет выделенные нули нецелого порядка, в работе (8) проводится исследование уравнения (1) в пространствах $L^p(0, \infty)$ при

$1 < p < \infty$ путем построения левой нормализации с помощью операторов Бесселя и Лиувилля интегро-дифференцирования. Случай, когда (1) исследуется в $L^\infty(0, \infty)$, рассмотрен в (9) при условии, что символ имеет производную, удовлетворяющую условию Гельдера там, где он отличен от нуля. В (10) уравнение (1) исследуется в пространствах $L^p(0, \infty)$ при $1 \leq p < \infty$.

1. Сначала введем некоторые обозначения. Множество функций, имеющих вид

$$c + \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{it} dt, \quad h \in L^1(-\infty, \infty), \quad (3)$$

будем обозначать R . Множество функций, допускающих представление (2) с $h=0$ п. в. на $(-\infty, 0)$, обозначается R^+ ; множество функций, допускающих представление (2) с $h=0$ п. в. на $(0, \infty)$, обозначается R^- . Легко можно проверить, что R, R^+, R^- — алгебры относительно поточечного умножения. Кроме того в силу теоремы Винера — Леви, если $G(\lambda) \in R$ и $G(\lambda)$ не обращается в нуль на $[-\infty, \infty]$, то и $[G(\lambda)]^{-1} \in R$. Аналогичные результаты справедливы для R^+ и R^- .

Преобразование Фурье функции f из класса $L^p(-\infty, \infty)$ при некоторых p будет обобщенной функцией, действующей на S (пространство быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций) таким образом:

$$(f, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\hat{\psi}(t) dt \quad \psi \in S.$$

Здесь $\hat{f}$ преобразование Фурье функции f . Если функция $h \in L^1(-\infty, \infty)$, то $\hat{h}\hat{f}$ будет обозначать следующую обобщенную функцию:

$$(\hat{h}\hat{f}, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} (h * f)(t)\hat{\psi}(t) dt \quad \psi \in S. \quad (*)$$

Операторы π^+ и π^- , переводящие класс преобразований Фурье функций из $L^p(-\infty, \infty)$ в классы преобразований Фурье функций из $L^p(0, \infty)$ и $L^p(-\infty, 0)$ (здесь и далее класс $L^p(0, \infty)$ ($L^p(-\infty, 0)$) будем отождествлять с подпространством $L^p(-\infty, \infty)$, состоящим из функций, обращающихся в нуль на отрицательной (положительной) полуоси) определим следующим образом;

$$(\pi^+[\hat{f}], \psi) = \int_0^{\infty} f(t)\hat{\psi}(t) dt$$

$\psi \in S.$

$$(\pi^{-1}[\hat{f}], \psi) = \int_{-\infty}^0 f(t) \hat{\psi}(t) dt$$

Для того чтобы исследовать уравнение (1), нужно сначала получить более удобную форму функции $1-K(\lambda)$. В (1) была доказана возможность факторизации невырождающейся части в представлении символа. Используя этот факт, символ, имеющий форму (2), можно представить в виде

$$1-K(\lambda) = \left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^{\alpha_+} \left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^{-\alpha_-} \left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^{\gamma} \frac{\Phi_0^-(\lambda)}{\Phi_0^+(\lambda)} \quad (4)$$

Здесь $\operatorname{Re} \alpha_+ > 0$, $1 \geq \operatorname{Re} \alpha_- > 0$, γ — целое число, $\Phi_0^+(\lambda) \in R^+$, $\Phi_0^-(\lambda) \in R^-$, $\Phi_0^+(z) \neq 0$ при $\operatorname{Im} z \geq 0$, $\Phi_0^-(z) \neq 0$ при $\operatorname{Im} z \leq 0$, $|\lambda/(\lambda+i)|^{\alpha_+}$, $|\lambda/(\lambda-i)|^{\alpha_-}$ — те ветви этих функций, которые аналитичны соответственно в полуплоскостях $D^+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, $D^- = \{z : \operatorname{Im} z < 0\}$.

2. Уравнение (1) можно записать в виде

$$\varphi(t) - \int_0^{\infty} k(t-s)\varphi(s)ds = b(t) + f(t) \quad -\infty < t < \infty.$$

Здесь φ и f доопределяются на $(-\infty, 0)$ равными нулю, а $b(t)$ определяется следующим образом:

$$b(t) = \begin{cases} 0 & t \geq 0 \\ -\int_0^{\infty} k(t-s)\varphi(s)ds & t < 0. \end{cases}$$

После этого, переходя к преобразованиям Фурье и используя представление (4), получим эквивалентное уравнение

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^{\alpha_+} \left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^{\gamma} \frac{\Phi^+(\lambda)}{\Phi_0^+(\lambda)} = \pi^+ \left| \left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^{\alpha_-} \frac{F(\lambda)}{\Phi_0^-(\lambda)} \right| \quad (5)$$

в случае, когда $\gamma \geq 0$, и

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^{\alpha_+} \left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^{\gamma} \frac{\Phi^+(\lambda)}{\Phi_0^+(\lambda)} = \pi^+ \left[\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^{\alpha_-} \frac{F(\lambda)}{\Phi_0^-(\lambda)} \right] + \sum_{k=1}^{-\gamma} \frac{\xi_{-\gamma-k}}{(\lambda-i)^k} \quad (6)$$

в случае, когда $\gamma < 0$. Здесь $\Phi^+(\lambda)$, $F(\lambda)$ — преобразования Фурье соответственно $\varphi(t)$ и $f(t)$; $\sum_{k=1}^{-\gamma} [\xi_{-\gamma-k}/(\lambda-i)^k]$ — главная часть лорановского разложения левой части (6). Используя оценки на рост преобразования Фурье—Лапласа функций из L^p , получаем следующие результаты.

а) Пусть $\operatorname{Re} \alpha_+ \neq [\operatorname{Re} \alpha_+]$, уравнение (1) рассматривается в L^p при $1 \leq p < \infty$, а правая часть (1) допускает представление

$$F(\lambda) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - i} \right)^m G(\lambda) + F_1^-(\lambda), \quad (7)$$

где $m = \left[\operatorname{Re} a_+ - \frac{1}{q} \right] + 1$, $F_1^-(\lambda) \in R^-$, $G(\lambda)$ — преобразование Фурье функции $g(t) \in L^1 \cap L^p$. В этом случае уравнение (1) имеет решение при $m \geq -\gamma + 1$ тогда и только тогда, когда выполнены $m + \gamma$ условий:

$$\int_0^\infty t^k e^{-t} \psi_1(t) dt = 0 \quad k = 0, 1, \dots, m + \gamma - 1,$$

где $\psi_1(t)$ — прообраз Фурье функции $\left(\frac{\lambda}{\lambda - i} \right)^{\alpha -} \frac{G(\lambda)}{\Phi_0^-(\lambda)}$, а $G(\lambda)$ определяется из (7).

При $m = -\gamma$ существует единственное решение (1), которое определяется как прообраз Фурье функции

$$\Phi^+(\lambda) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + i} \right)^{m - \alpha +} \Phi_0^+(\lambda) \pi^+ \left[\left(\frac{\lambda}{\lambda - i} \right)^{\alpha -} \frac{G(\lambda)}{\Phi_0^-(\lambda)} \right].$$

При $m < -\gamma$ уравнение (1) всегда разрешимо, однородное уравнение имеет $-\gamma - m$ линейно-независимых решений, а общее решение неоднородного уравнения определяется как прообраз Фурье функции

$$\begin{aligned} \Phi^+(\lambda) = & \left(\frac{\lambda}{\lambda + i} \right)^{-\alpha +} \left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i} \right)^{-\gamma} \Phi_0^+(\lambda) \left(\frac{\lambda}{\lambda - i} \right)^m \times \\ & \times \left[\pi^+ \left[\left(\frac{\lambda}{\lambda - i} \right)^{\alpha -} \frac{G(\lambda)}{\Phi_0^-(\lambda)} \right] + \sum_{j=0}^{-\gamma - m - 1} \frac{c_j \lambda^j}{(\lambda - i)^{-\gamma - m}} \right], \end{aligned}$$

где c_j — произвольные постоянные.

б) При $\operatorname{Re} a_+ = [\operatorname{Re} a_+]$, $a_+ \neq [\operatorname{Re} a_+]$ в случае, когда (1) рассматривается в пространствах L^p при $1 \leq p < \infty$ результаты те же, что и в пункте а). Пусть (1) рассматривается в L^∞ . В этом случае достаточно предположить, что правая часть (1) допускает представление

$$F(\lambda) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - i} \right)^{m_1} G(\lambda) + F_1^-(\lambda), \quad (8)$$

где $m_1 = [\operatorname{Re} a_+] - 1$, $G(\lambda)$ — преобразование Фурье функции из $L^1(0, \infty)$, $F_1^- \in R^-$. Все результаты пункта а) сохраняются, если заменить m на m_1 и подставить $G(\lambda)$ из представления (8).

в) Пусть теперь $a_+ = [\operatorname{Re} a_+]$. В этом случае изменится результат, когда (1) рассматривается в $L^1(0, \infty)$. Будем предполагать, что правая часть (1) допускает представление

$$F(\lambda) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - i} \right)^{m_1} G(\lambda) + F_1^-(\lambda), \quad (9)$$

где $m_2 = [\operatorname{Re} a_+]$, $G(\lambda)$ — преобразование Фурье функции $g(t) \in L^1$, а $F_1^- \in R^-$. Тогда результаты а) сохранятся, если заменить m на m_2 и подставить $G(\lambda)$ из представления (9).

В случае же, когда (1) рассматривается в $L^p(0, \infty)$ при $1 < p \leq \infty$, сохраняются результаты пункта б).

В заключение заметим, что вышеприведенные результаты не следуют из (10), где методом неоднозначной факторизации исследована задача (1) при $1 \leq p < \infty$, однако не дается ответ на вопрос о принадлежности решений пространству $L^p(0, \infty)$.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Ա. Հ. ԲԱԲՍՅԱՆ

Վիճե՛ր — Հոսպիտալ ալլափոխվող սիմվոլով ինտեգրալ հավասարումներ

Աշխատանքում դիտարկվում է (1) հավասարումը այն պայմանով, որ սիմվոլը ունի (3) տեսքը:

Հետազոտման ժամանակ օգտագործվում է սիմվոլի շալափոխվող մասի ֆակտորիզացիայի հնարավորությունը:

Պարզաբանվում են պայմանները, որոնց դեպքում (1) հավասարումը ունի լուծում, երբ աջ մասը թույլատրում է (7), (8), կամ (9) ներկայացումը:

Հաշվարկվում է համասեռ հավասարման գծային անկախ լուծումների քանակը:

Տրվում է այդ լուծումների տեսքը ֆուրյեի ձևափոխությունների տերմիններով:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ М. Г. Крейн, УМН, т. 13, вып. 5 (1958). ² Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский, Изв. АН СССР, сер. математика, т. 20, № 1 (1956). ³ В. Б. Дыбин, Изв. АН АрмССР, Математика, т. 2, № 4 (1967). ⁴ В. Б. Дыбин, ДАН СССР, т. 191, № 4 (1970). ⁵ Н. Г. Чеботарев, Изв. вузов, математика, № 10, 1967. ⁶ М. И. Хайкин, Изв. вузов, математика, № 10, 1967. ⁷ Ф. Д. Гахов, В. И. Смагина, Изв. АН СССР, сер. математика, 26, № 3 (1962). ⁸ Н. К. Карапетянц, Дифференциальные уравнения, т. 13, № 8 (1977). ⁹ Н. Е. Товмасян, Сибирский мат. журн., т. 19, № 4 (1978). ¹⁰ З. Пресдорф, Некоторые классы сингулярных уравнений, М., 1979. ¹¹ М. И. Хайкин, Изв. вузов, математика, № 8, 1978.