ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXIII 1981 1

УДК 62.507

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Ш. Е. Бозоян

Алгебраическое описание схем, построенных на интегральных микросхемах

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 9/III 1981)

В работах автора ([1-3]) язык бесскобочной записи формул ([4]) был приспособлен к описанию схем из функциональных элементов ([1]) и схем из функциональных элементов и задержек ([2,3]).

В настоящей заметке приводятся аналогичные исследования для схем из интегральных микросхем (интегральная микросхема имеет несколько входов и несколько выходов и реализует конечный автомат). Вводится понятие записи схемы (запись представляет собой конечную последовательность символов) и доказывается теорема о записи (она устанавливает необходимые и достаточные условия того, чтобы данная последовательность символов являлась записью некоторой схемы из интегральных микросхем). Приведенный язык может быть применен в области автоматизации проектирования вычислительных устройств.

Перечислим средства, необходимые для определения понятия схемы. Фиксируем некоторое непустое множество X (множество „сигналов"), а также объекты („элементы") следующих типов:

1) элемент, не имеющий входов и имеющий один выход (рис. 1, *а*). Элемент этого типа называется элементарной схемой. На выходе элементарной схемы в любой дискретный момент времени образуется определенный сигнал из X. Выходу элементарной схемы приписывается номер 1;

2) элемент, имеющий n входов и m выходов (n, $m=1, 2, \ldots$) (рис. 1, *б*). Этот элемент реализует конечный автомат, функции выходов и переходов которого отображают множество $X^n \times C$ в X^m, где C — множество внутренних состояний этого автомата. Каждому входу (выходу) приписан определенный номер так, что разным входам (выходам) приписаны разные номера. Такой элемент обозначается символом $F_k^{(n,m)}$, $k=1, 2, \ldots$, где тройка $<n, m, k>$ различает разные элементы этого типа. Каждому элементу $F_k^{(n,m)}$ приписывается

множество отмеченных пар номеров входов и выходов $E(F_k^{(n,m)}) = \{\langle i_1, j_1\rangle, \ldots, \langle i_r, j_r\rangle\}$ ($E(F_k^{(n,m)})$, может быть пустым), где в $\langle i_s, j_s\rangle$ $(s=\overline{1,r})$ i_s есть номер входа, а j_s—номер выхода элемента $F_k^{(n,m)}$, и из $s \neq s'$, вообще говоря, не следует $i_s \neq i_{s'}$ или $j_s \neq j_{s'}$. Физический смысл пары $\langle i_s, j_s\rangle \in E(F_k^{(n,m)})$ заключается в том, что выход элемента (автомата) $F_k^{(n,m)}$ с номером j_s непосредственно не зависит от входа с номером i_s, т. е. функция выхода с номером j_s зависит от входа с номером i_s фиктивно.

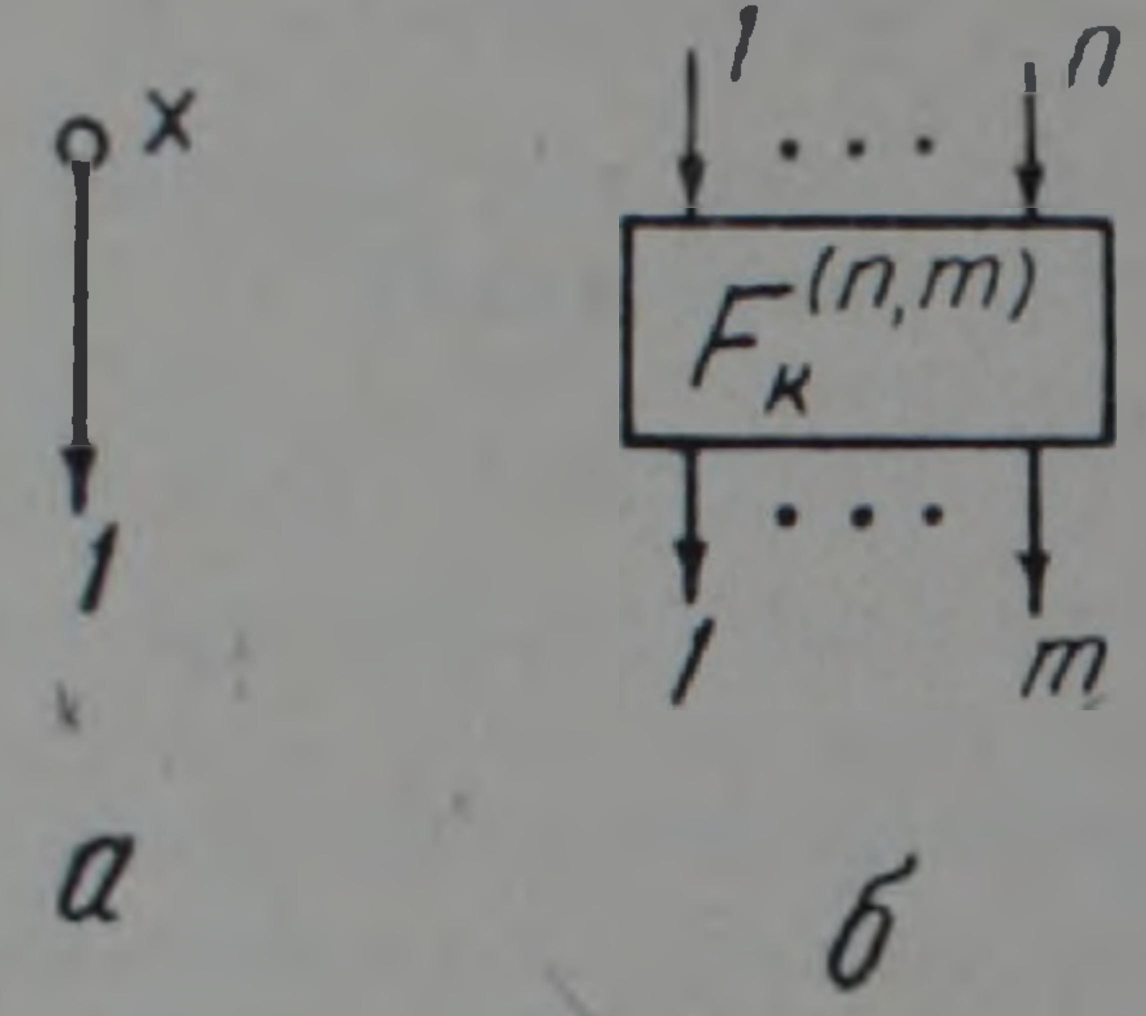

Рис. 1. Элементы: *а*—не имеющий входов и имеющий один выход; *б*—имеющий *n* входов и *m* выходов

По индукции определим понятие схемы.

Определение. *Базис индукции.* 1) Элементарная схема является схемой. Выходом этой схемы является выход элементарной схемы, которому приписывается номер 1 (рис. 2, *а*).

2) Если $x_1, \ldots, x_n$—элементарные схемы, то отождествляя выходы этих элементарных схем со входами с соответствующими номерами элемента $F_k^{(n,m)}$, получим некоторую конструкцию, которая является схемой (рис. 2, *б*). Выходами этой схемы являются выходы элемента $F_k^{(n,m)}$. Номера выходов элемента $F_k^{(n,m)}$ приписываются к соответствующим выходам схемы.

Индуктивный переход. 1. Пусть определены схемы S_1 и S_2, которые не пересекаются. Пусть S_1 имеет r выходов, к которым приписаны номера $1, 2, \ldots, r$ соответственно, а S_2 имеет $l-r$ выходов с номерами $1, 2, \ldots, l-r$. Теоретико-множественное объединение $S=(S_1, S_2)$ есть схема с l выходами, причем выходами схемы S с номерами $1, 2, \ldots, r$ являются выходы схемы S_1 с теми же номерами соответственно, а выходами с номерами $r+1, r+2, \ldots, l$—выходы схемы S_2 с номерами $1, 2, \ldots, l-r$ соответственно (рис. 2, *в*).

Для изложения следующего пункта индуктивного перехода введем понятие проводимости пути в схеме. Последовательность пар номеров входов-выходов и элементов

$$(i_1, j_1), F_{k_1}^{(n_1, m_1)}, (i_2, j_2), F_{k_2}^{(n_2, m_2)}, \ldots, (i_r, j_r), F_{k_r}^{(n_r, m_r)}$$

называется путем в данной схеме, если выход элемента $F_{k_s}^{(n_s, m_s)}$ с номером j_s отождествлен со входом элемента $F_{k_{s+1}}^{(n_{s+1}, m_{s+1})}$ с номером i_{s+1} $(s=\overline{1, r-1})$. Началом этого пути является вход элемента $F_{k_1}^{(n_1, m_1)}$ с номером i_1, концом— выход элемента $F_{k_r}^{(n_r, m_r)}$ с номером j_r. Будем говорить, что указанный путь не проводит, если для некоторого s $(1 \leqslant s \leqslant r)$ $(i_s, j_s) \in E(F_{k_s}^{(n_s, m_s)})$, в противном случае он проводит.

2. Пусть схема S' с числом выходов $l+1$ содержит элементарную схему x, и любой путь, началом которого является выход элементарной схемы x, а концом—выход схемы S' с номером $l+1$, не проводит. Пусть для некоторого выхода S' с номером $r (1 \leqslant r \leqslant l)$ существует путь, началом которого является выход элементарной схемы x, а концом—выход S' с номером r. Если исключить из S' элементарную схему x, заменив ее выход выходом схемы S' с номером $l+1$, то получится некоторая конструкция S, которая является схемой (рис. 2, г). Выходы схемы S с номерами 1, 2, ..., l будут выходами S с этими же номерами соответственно.

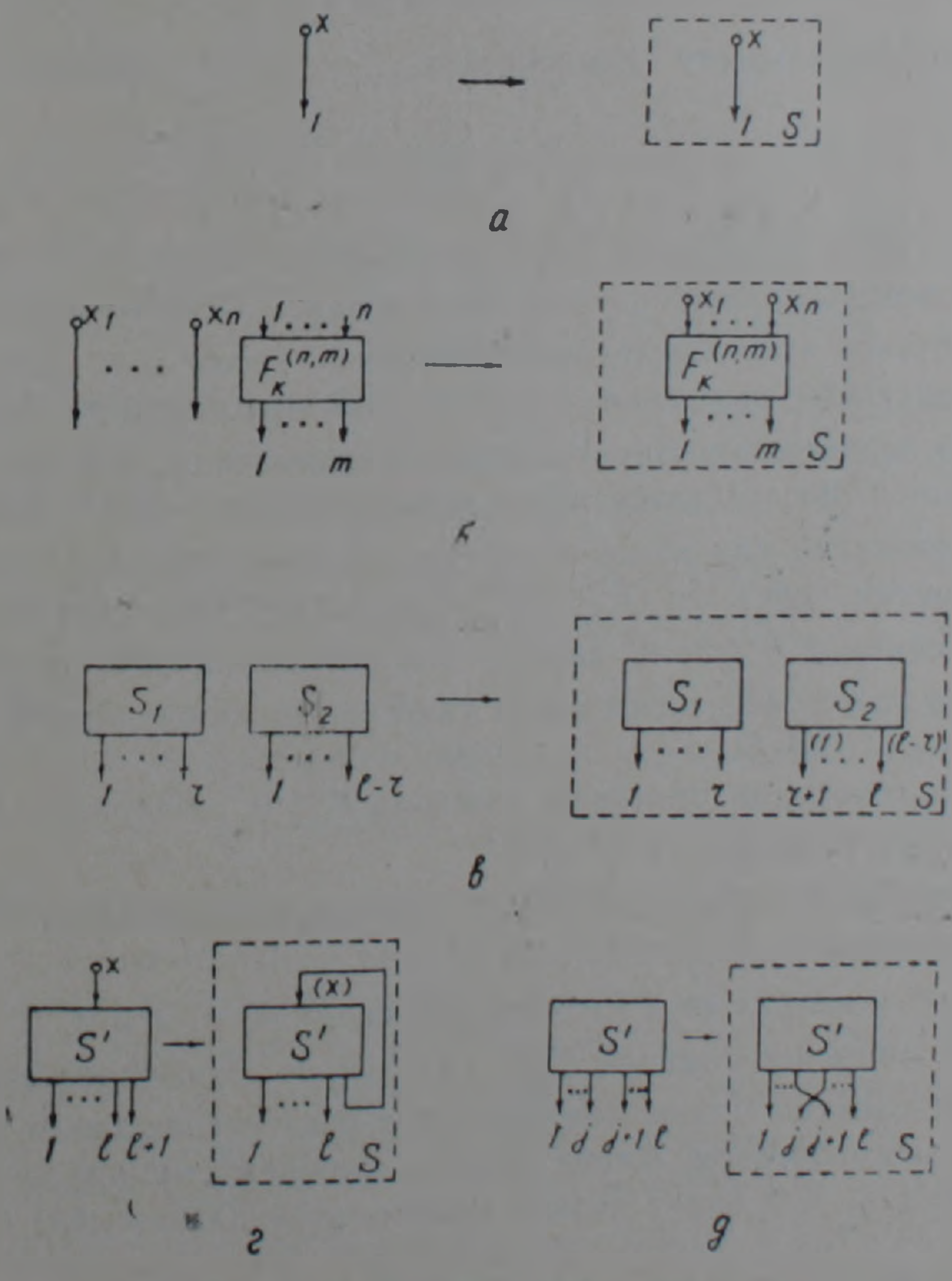

Рис. 2. Индуктивное определение схемы

3. Пусть определена схема S' с числом выходов l. Если выходу схемы S с номером j приписать номер $j+1$, а выходу с номером $j+1$ —номер j, то полученная конструкция S является схемой. Выходами схемы S являются все выходы S', причем выходы с номерами $1, 2, \ldots, j-1, j+2, \ldots, l$ совпадают с выходами S' с этими же номерами соответственно, выходы S с номерами j и $j+1$ совпадают с выходами S' с номерами $j+1$ и j соответственно (рис. 2, *д*).

Из определения схемы следует, что в ней жестко фиксирована упорядоченность выходов схемы, а также входов и выходов ее элементов. Такая фиксация нужна для однозначности записи схемы, определение которой приводится ниже.

Для определения понятия записи схемы перечислим средства и понятия, позволяющие кодировать схему при помощи конечной последовательности символов. Рассмотрим множество $D=\{x_j, F^{0(n,m)}_{k,i}, F^{(n,m)}_{k,m}\}$, где $1 \leqslant i \leqslant m$; $m, n, k, j \in \{1, 2, 3, \ldots\}$. Каждому символу из D поставим в соответствие некоторое число, называемое его весом, следующим образом:

$$\omega(x_j)= \omega(F^{(n,m)}_{k,i})=-1, \ \omega(F^{0(n,m)}_{k,i})=n-1.$$

Весом последовательности символов $s_1 \ldots s_N$ из D назовем число

$$\omega(s_1 \ldots s_N)=\sum_{l=1}^{N}\omega(s_l).$$

Пусть $F'^{(n,m)}_{k,i}$ обозначает $F^{(n,m)}_{k,i}$ или $F^{0(n,m)}_{k,i}$. Описанием символа $F'^{(n,m)}_{k,i}$ в данной последовательности символов из D называется минимальный отрезок этой последовательности с весом $-n$, непосредственно следующий за символом $F^{0(n,m)}_{k,j}$ (при некотором j, $1 \leqslant j \leqslant m$) из этой последовательности. Из этого определения следует, что $F'^{(n,m)}_{k,i}$ в данной последовательности может иметь одно описание, несколько описаний или вовсе не иметь описаний. Описание символа $F'^{(n,m)}_{k,i}$ обозначим через Оп $(F'^{(n,m)}_{k,i})$. Символы $F^{(n,m)}_{k,i}$ называются подчиненными символу $F^{0(n,m)}_{k,j}$ в данной последовательности символов.

Определение (индуктивное). В последовательности символов $s_1 \ldots s_N$ из D

1) если некоторое описание символа $F'^{(n,m)}_{k,i}$ содержит символ $F'^{(n_2,m_2)}_{a,j}$, то $F'^{(n_1,m_1)}_{k,i}$ зависит от $F'^{(n_2,m_2)}_{a,j}$;

2) если $F'^{(n_1,m_1)}_{k,i}$ зависит от $F'^{(n',m')}_{k',i'}$, а $F'^{(n',m')}_{k',i'}$ зависит от $F'^{(n_2,m_2)}_{a,j}$, то $F'^{(n_1,m_1)}_{k,i}$ зависит от $F'^{(n_2,m_2)}_{a,j}$;

3) $F'^{(n_1,m_1)}_{k,i}$ зависит от $F'^{(n_2,m_2)}_{a,j}$ только согласно п. 1 и 2.

Любое описание символа $F'^{(n,m)}_{k,i}$ в данной последовательности символов однозначно можно разбить на n непересекающихся компонент следующим образом. Слева направо выберем минимальный отрезок с весом -1. Он будет первой компонентой. Отбрасывая ее, выберем следующий минимальный отрезок с весом -1. Это будет второй компонентой и т. д.

Определение (индуктивное). 1) Пусть некоторая i-ая компонента некоторого описания символа $F'^{(n_1,m_1)}_{k_1,j}$ в качестве первого символа содержит $F'^{(n_2,m_2)}_{k_2,r}$, и $\langle i, j\rangle \notin E\ (F^{(n_1,m_1)}_{k_1})$. Тогда $F'^{(n_1,m_1)}_{k_1,j}$ зависит от $F'^{(n_2,m_2)}_{k_2,r}$ свободно.

2) Если $F'^{(n_1,m_1)}_{k_1,j}$ зависит от $F'^{(n',m')}_{k',j'}$ свободно, а $F'^{(n',m')}_{k',j'}$ зависит от $F'^{(n_2,m_2)}_{k_2,r}$ свободно, то $F'^{(n_1,m_1)}_{k_1,j}$ зависит от $F'^{(n_2,m_2)}_{k,r}$ свободно.

3) $F'^{(n_1,m_1)}_{k_1,j}$ зависит от $F'^{(n_2,m_2)}_{k_2,r}$ свободно только согласно п. 1—2.

Если $F'^{(n_1,m_1)}_{k_1,j}$ зависит от $F'^{(n_2,m_2)}_{k_2,r}$, но не зависит свободно, то будем говорить, что зависимость $F'^{(n_1,m_1)}_{k_1,j}$ от $F'^{(n_2,m_2)}_{k_2,r}$ является связанной.

Теперь вернемся к определению понятия записи схемы. Запись схемы S обозначим через $h(S)$. Предварительно определим (по индукции) понятие записи схемы относительно ее i-го выхода. Запись схемы S относительно i-го выхода обозначим через $h(S, i)$.

Определение. *Базис индукции.* 1) Если S есть элементарная схема x, то

$$h(S,\ 1) = x.$$

2) Если S получена из $x_1, \ldots, x_n$ и $F^{(n,m)}_k$ согласно п. 2 базиса индукции определения схемы, то

$$h(S,\ i) = \begin{cases} F^{0(n,m)}_{k,1}\ x_1 \ldots x_n, & \text{если } i=1, \\ F^{(n,m)}_{k,i}, & \text{если } 1 < i \leqslant m. \end{cases}$$

Индуктивный переход. 1) Пусть определены $h(S_1, i)$ $(i=\overline{1,r})$ и $h(S_2,i)$ $(i=\overline{1,\ l-r})$. Если схема S получается из S_1 и S_2 согласно п. 1 индуктивного перехода определения схемы, то

$$h(S,\ i) = \begin{cases} h(S_1,\ i), & \text{если } 1 \leqslant i \leqslant r, \\ h(S_2,\ i-r), & \text{если } r < i \leqslant l. \end{cases}$$

2) Пусть определены $h(S',\ i)$ $(i=\overline{1,\ l+1})$, а S получается из S' согласно п. 2 индуктивного перехода определения схемы. Тогда

$$h(S,\ i) = [h(S',\ i)]^{x}_{h(S',\ l+1)},\ i=\overline{1,\ l}.$$

3) Пусть определены $h(S',\ i)$ $(i=\overline{1,\ l})$, а S получается из S' согласно п. 3 индуктивного перехода определения схемы. Тогда принимается $h(S,\ i) = h(S',\ i)$ для $i=1, 2, \ldots, j-1, j+2, \ldots, l$, а $h(S,\ j)$ и $h(S,\ j+1)$ получаются из $h(S',\ j)$ и $h(S',\ j+1)$ следующим образом. Пусть $h(S',\ j)$ содержит символ $F^{0(n,m)}_{k,i}$ (при некоторых n, m, k, i), а $h(S',\ j+1)$ —некоторый из его подчиненных, среди которых первым (слева) является $F^{(n,m)}_{k,r}$. Пусть Оп $(F^{0(n,m)}_{k,i})$ не содержит такой символ $F^{0(n_1,m_1)}_{k_1,l_1}$, который имел бы подчиненные в $h(S',\ j+1)$. В $h(S',$

$j+1)$ заменим символ $F_{k,r}^{(n,m)}$ на $F_{k,r}^{0(n,m)}$ Оп $(F_{h,i}^{0(n,m)})$, а в $h(S', j)$ $F_{h,i}^{0(n,m)}$ Оп $(F_{h,i}^{0(n,m)})$ заменим на $F_{k,i}^{(n,m)}$. Эту процедуру повторяем многократно, до тех пор, пока возможно ее осуществлять. Пусть в результате этого $h(S', j)$ превратился в $h'(S', j)$, а $h'(S, j+1)$ — в $h'(S', j+1)$ Будем принимать

$$h(S, j)=h'(S', j+1),\ h(S, j+1)=h'(S', j).$$

Записью схемы S с l выходами называется

$$h(S)=h(S, 1)\ h(S, 2)\dots h(S, l).$$

Пример. Рассмотрим схему S, изображенную на рис. 3. Пусть $E(F_1^{(3,2)})=E(F_3^{(3,2)})=\varnothing$, $E(F_2^{(3,2)})=\{<1, 2>, <2, 2>, <3, 2>\}$, $E(F_4^{(3,2)})=\{<1, 1>, <1, 2>; <2, 1>, <2, 2>, <3, 1>, <3, 2>\}$,

$$E(F_5^{(2,3)})=\{<1, 3>, <2, 3>\}.$$

Запись схемы S пишется так:

$$h(S)=F_{1,1}^{0(3,2)}\ F_{2,1}^{0(3,2)}\ x_1\ x_2\ x_3\ F_{2,2}^{(3,2)}\ M_1^0\ F_{5,1}^{0(2,3)}\ x_4\ x_5\ F_{3,1}^{0(3,2)}\ F_{1,2}^{(3,2)}\ F_{4,1}^{0(3,2)}\ M_1 F_{5,2}^{(2,3)}\ F_{3,2}^{(3,2)}\ F_{4,2}^{(3,2)}\ F_{5,3}^{(2,3)}.$$

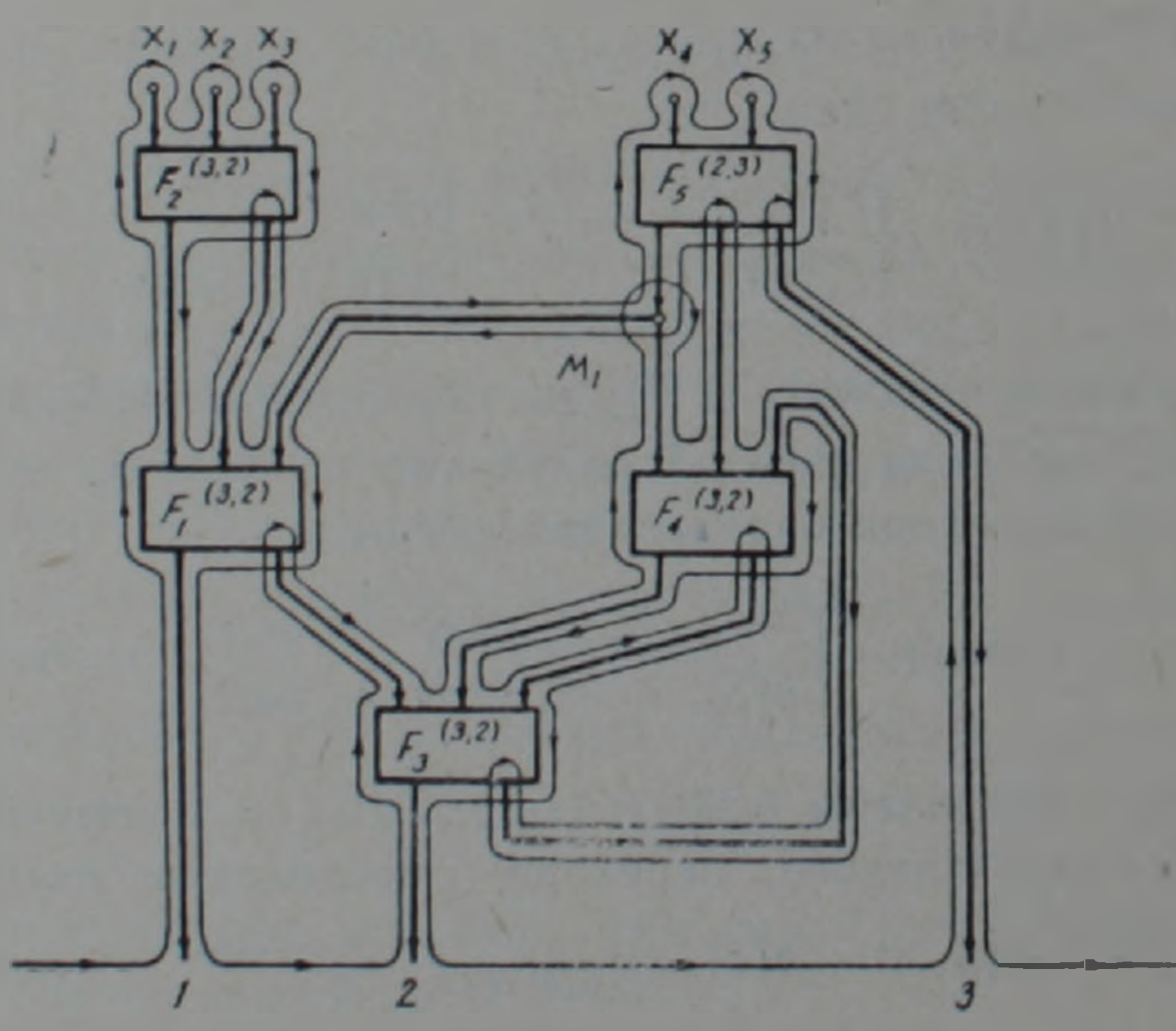

Рис. 3. Пример схемы

Говоря неформально, запись схемы получается путем последовательного рассмотрения всех элементов схемы и их записи по следующему правилу. Рассмотрим „маршрут", указанный тонкой линией со стрелками. Проходя по этому маршруту, мы записываем все те „попутные" элементы, мимо которых проходим против направления их выходов. Далее, если элемент $F_k^{(n,m)}$ рассматривался впервые и рассмотрение осуществлялось через его i-ый выход, то записывается символ $F_{k,i}^{0(n,m)}$ и далее рассматривается элемент, один из выходов которого является входом элемента $F_k^{(n,m)}$. Если же элемент $F_k^{(n,m)}$ рассматривался не впервые и рассмотрение осуществлялось через его i-ый выход, то записывается символ $F_{k,i}^{(n,m)}$ и осуществляется возврат по i-му выходу до встречи с другим элементом по его некоторому выходу, а если нет такого элемента, то процесс записи заканчивается. При рассмотрении элемента x записывается символ x. Среди элементов типа $F_i^{(1,n)}$ выделяется один из них, который обладает тем свойством, что его выходы и вход функционально равносильны (т. е. в любой момент времени на всех выходах этого элемента получается тот сигнал, который поступил на вход в этот же момент времени), и поэтому он называется элементом ветвления. Для элементов ветвления вводится специальное метаобозначение—символ M_i. Разные точки ветвления схемы снабжаются элементами ветвления разных индексов.

Замечание. Если в записи схемы любой символ $F_{k,1}^{0(n,1)}$ заменить метаобозначением $F_k^{(n)}$ или $F^{(n)}$ (в последнем случае если $F^{(n)}$ является общепринятым обозначением элемента с одним выходом, например $\bigvee^{(n)}$ („или“ с n входами)), а также заменить пары символов $M_j^0\ M_k^0$ и $M_j^0\ M_k$ на M_k^0 и M_k соответственно (поскольку результат последовательного соединения двух элементов ветвления можно заменить одним элементом ветвления), то запись схемы из функциональных элементов и задержек на данном языке совпадает с записью этой же схемы на языке, описанном в ([3]). Таким образом, данный язык является обобщением языка, изложенного в ([3]).

Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Для того, чтобы последовательность символов $s_1 \ldots s_N$ из D являлась записью некоторой схемы с l $(l=1, 2, \ldots)$ выходами, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

а) $\omega(s_1 \ldots s_N)=-l$;

б) $\omega(s_1 \ldots s_r)\geqslant 1-l$ *для любого* $r<N$;

в) последовательность $s_1 \ldots s_N$ *символы* $F_{k,i_0}^{0(n,m)}$ *(при некотором единственном* i_0, $1\leqslant i_0\leqslant m$*) и* $F_{k,i}^{(n,m)}$ $(i=1, 2, \ldots, i_0-1, i_0+1, \ldots, m;$ $m\geqslant 2)$ *содержит или не содержит одновременно, причем каждый точно один раз и* $F_{k,i_0}^{0(n,m)}$ *предшествует в* $s_1 \ldots s_N$ *символам* $F_{k,i}^{(n,m)}$ *для всех* $i=1, 2, \ldots, i_0-1, i_0+1, \ldots, m$, *а при* $m=1$ $F_{k,1}^{0(n,m)}$ *содержится в* $s_1 \ldots s_N$ *однократно или вообще не содержится;*

г) Все зависимости $F_{k,i}^{\prime(n,m)}$ *от* $F_{k,j}^{\prime(n,m)}$ $(i, j=\overline{1, m})$ *являются связанными.*

Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма. *Для любой схемы* S *и любого* i, $i=\overline{1, l}$ *(*l*—число выходов этой схемы)* $\omega(h(S, i))=-1$ *и вес любого собственного* *начального отрезка записи h((S, i) является неотрицательным числом.*

Доказательство ведем индукцией по построению схемы S, т. е. по числу $l(S)$ применений п. 1—3 индуктивного перехода определения схемы. Поскольку многократное применение п. 3 может привести к предыдущим результатам, то под $l(S)$ мы будем понимать минимальное число применений указанных пунктов при построении схемы S.

Базис индукции $l(S)=0$. Доказательство очевидно.

Индуктивный переход. Пусть лемма доказана для всех схем S, у которых $l(S) < l_0$; докажем ее для любой схемы S, для которой $l(S)=l_0$. Рассмотрим возможные случаи:

1) S получена из S_1 и S_2 согласно п. 1 индуктивного перехода определения схемы. Справедливость леммы для S следует из ее справедливости для S_1 и S_2 (индуктивное предположение);

2) S получена из S' согласно п. 2 индуктивного перехода определения схемы. Справедливость леммы следует из ее справедливости для схемы S' (индуктивное предположение);

3) S получена из S' согласно п. 3 индуктивного перехода определения схемы. Справедливость леммы для S следует из того, что $h(S, j)$ и $h(S, j+1)$ получаются из $h(S', j)$ и $h(S', j+1)$ процедурами, сохраняющими весовые характеристики этих записей.

Лемма доказана.

Из леммы, в частности, следует, что любой символ $F_{k,r}^{'(n,m)}$ из $h(S)$ имеет единственное описание в $h(S)$. Действительно, пусть символ $F_{k,r_0}^{0(n,m)}$ содержится в $h(S, i)$. Из определения записи схемы следует, что он в $h(S)$ больше не встречается, и в $h(S)$ не встречается также символ $F_{k,j}^{0(n,m)}$, где $j \neq r_0$. Отсюда следует, что $F_{k,r}^{'(n,m)}$ не может иметь больше одного описания. Далее, из п. 2 базиса индукции определения записи $h(S, i)$ следует, что существует последовательность символов с весом $-n$, непосредственно следующих за $F_{k,r_0}^{0(n,m)}$, и эта последовательность полностью содержится в $h(S, i)$ (это следует из леммы). Итак, $F_{k,r}^{'(n,m)}$ имеет точно одно описание, которое вместе с $F_{k,r_0}^{0(n,m)}$ содержится в $h(S, i)$.

Доказательство теоремы. Необходимость доказывается индукцией по построению схемы, т. е. по числу $l(S)$, с использованием доказанной леммы. Достаточность доказывается индукцией по длине N последовательности $s_1 \ldots s_N$. Идея доказательства заключается в том, что $s_1 \ldots s_N$ разбивается на „части“ так, чтобы они, или некоторые их преобразования, удовлетворяли условиям теоремы (такая возможность следует из условий теоремы), из чего следует (по индуктивному предположению), что они являются записями каких-то схем S_1 и S_2. Теперь из S_1 и S_2 применением индуктивного перехода определения схемы можно получить некоторую схему S с записью $s_1 \ldots s_N$.

Поскольку интегральная микросхема построена из функциональных и запоминающих элементов, то "раскрывая" эти микросхемы, мы в конце концов получим схему из функциональных и запоминающих элементов. Можно указать простые формальные правила преобразования записи схемы при раскрытии ее элементов. Таким образом задача моделирования функционирования схемы из интегральных микросхем сводится к задаче моделирования схемы из функциональных и запоминающих элементов ([3]).

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Շ. Ե. ԲՈԶՈՅԱՆ

Ինտեգրալ միկրոսխեմաների վրա հավաքված տրամաբանական սխեմաների նկարագրության լեզու

Բանաձևերի՝ առանց փակագծերի գրության լեզուն ընդհանրացվում և հարմարեցվում է ինտեգրալ միկրոսխեմաների վրա հավաքված տրամաբանական սխեմաների նկարագրությանը։ Մտցվում է սխեմայի գրության հասկացողությունը, որը հանդիսանում է սիմվոլների վերջավոր հաջորդականություն։ Ապացուցվում է թեորեմ, որը նշում է անհրաժեշտ ու բավարար պայմաններ, որպեսզի սիմվոլների տված հաջորդականությունը լինի ինտեգրալ միկրոսխեմաների վրա հավաքված որևէ տրամաբանական սխեմայի գրություն։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Ш. Е. Бозоян*, ДАН АрмССР, т. 78, № 4, (1979). [2] *Ш. Е. Бозоян*, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1978, № 6. [3] *Ш. Е. Бозоян*, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 1, 1981. [4] *Lukasiewicz*, Coll. Intern. Centre. Nat. Rech. Sci., vol. 36 (1950).