ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXIII 1981 1

УДК 517.956.226

МАТЕМАТИКА

Л. Ш. Агабабян, А. Б. Нерсесян

О достаточных условиях корректности задачи Гурса для гиперболического уравнения второго порядка со степенным выражением

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 28/I 1981)

Введение. Рассмотрим уравнение

$$y^{2m}u_{xx}-u_{yy}+a(x,\ y)u_x+b(x,\ y)u_y+c(x,\ y)u=f(x,\ y), \qquad (0.1)$$

где $m>0$, $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$, $f(x, y)$—непрерывные функции в четырехугольнике D, ограниченном характеристиками уравнения (0.1), выходящими из точек $O(0, 0)$ и $C(0, a)$. Через OA и OB обозначим куски характеристик, выходящих из начала координат $O(0, 0)$.

Задача Гурса. Найти в области D решение уравнения (0.1), непрерывное в $\overline{D}$ и удовлетворяющее граничным условиям

$$u|_{OA}=\mu_1(y), \quad u|_{OB}=\mu_2(y). \qquad (0.2)$$

В рассматриваемой постановке задача Гурса, насколько нам известно, не изучалась. В работе [1] изучается задача Гурса для уравнения

$$y^2u_{xx}-u_{yy}+\alpha u_x=0, \quad \alpha=\mathrm{const}$$

в области, ограниченной отрезком [0, 1] оси x и характеристиками, выходящими из точек $A(0, 0)$ и $B(1, 0)$. В работах [2,3] изучается, в частности, задача Гурса для областей, содержащих кусок линии вырождения.

Без ограничения общности можно считать $b(x, y)=\mu_1(y)=\mu_2(y)=0$. Первое достигается введением новой неизвестной функции v по формуле

$$u=v\exp\left\{\frac{1}{2}\int_h^y b(x,\ s)\,ds\right\},$$

а однородность граничных условий, например, заменой

$$v(x, y)=u(x, y)-\frac{\gamma_2(y)-x}{\gamma_2(y)-\gamma_1(y)}\mu_1(y)-\frac{\gamma_1(y)-x}{\gamma_1(y)-\gamma_2(y)}\mu_2(y),$$

где $x=\gamma_i(y)$ — уравнения характеристик OA и OB.

В предлагаемой работе выявляются достаточные условия корректности задачи

$$y^{2m}u_{xx}-u_{yy}+a(x, y)u_x+c(x, y)u=f(x, y); \tag{1}$$

$$u|_{OA}=u|_{OB}=0 \tag{2}$$

при соответствующих ограничениях на коэффициенты уравнения (1), причем, как и в случае задачи Коши для уравнения (1), оказывается, что основному ограничению подвергается коэффициент $a(x, y)$.

Основным результатом работы является

Теорема. *Пусть в области D выполняются условия:*

1) $\frac{1}{4}\left(\frac{2m}{m+1}y^{m-1}-a(x, y)^2\right)_y^2+y^{2m}a_x^2(x, y)\leqslant L^2\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^2 y^{2(m-2)};$

2) $|c(x, y)|\leqslant L\left(\frac{m+1}{2}\right)^{\frac{2}{m+1}}y^{-2};$

3) $f(x, y)\in C(\overline{D}),$

где

$$L=\text{const}>0,\ L<2\left(\frac{m+1}{2}\right)^{2\beta-1}\cdot\frac{1}{4m+6},\quad \beta=\frac{m}{m+1}.$$

Тогда существует единственное решение задачи (1), (2) *из класса $C(\overline{D})$, устойчивое относительно возмущений $f\in C(\overline{D})$.*

Таким образом, оказывается, что для корректности задачи (0.2) достаточны примерно те же условия, что и в случае задачи Коши для уравнения (0.1) с данными на линии вырождения (см. ([4]), гл. 5, § 1).

1. Сведение к интегральному уравнению. Переходя к новым переменным

$$\zeta=x-\frac{y^{m+1}}{m+1},\quad \eta=x+\frac{y^{m+1}}{m+1} \tag{3}$$

и используя соотношения

$$x=\frac{\zeta+\eta}{2},\qquad y=\left[\frac{m+1}{2}(\eta-\zeta)\right]^{\frac{1}{m+1}},\quad \eta>0,\quad \zeta<0,$$

приведем уравнение (1) к виду

$$u_{\zeta\eta}+\frac{1}{4}\left[\frac{a_1(\zeta, \eta)}{\left(\frac{m+1}{2}(\eta-\zeta)\right)^{2\beta}}+\frac{2m}{(m+1)(\eta-\zeta)}\right]u_\zeta+\frac{1}{4}\left[\frac{a_1(\zeta, \eta)}{\left(\frac{m+1}{2}(\eta-\zeta)\right)^{2\beta}}-\right.$$

$$-\frac{2m}{(m+1)(\eta-\zeta)}\Bigg]u_\eta+\frac{1}{4}\frac{c_1(\zeta,\eta)}{\left(\frac{m+1}{2}(\eta-\zeta)\right)^{2\beta}}u=\frac{1}{4}\frac{f_1(\zeta,\eta)}{\left(\frac{m+1}{2}(\eta-\zeta)\right)^{2\beta}}, \qquad (4)$$

где

$$a_1(\zeta,\eta)=a\left(\frac{\eta+\zeta}{2},\ \left(\frac{m+1}{2}(\eta-\zeta)\right)^{\frac{1}{m+1}}\right);$$

$$c_1(\zeta,\eta)=c\left(\frac{\eta+\zeta}{2},\ \left(\frac{m+1}{2}(\eta-\zeta)\right)^{\frac{1}{m+1}}\right);$$

$$f_1(\zeta,\eta)=f\left(\frac{\eta+\zeta}{2},\ \left(\frac{m+1}{2}(\eta-\zeta)\right)^{\frac{1}{m+1}}\right). \qquad (5)$$

Граничные условия (2) примут вид

$$u|_{\zeta=0}=u|_{\eta=0}=0. \qquad (6)$$

Решение задачи (4), (6) ищется в области $D_1=\{\zeta,\eta;\ \zeta_0<\zeta<0,\ 0<\eta<\eta_0\}$ плоскости переменных ζ, η. Рассмотрим, далее, уравнение

$$y^{2m}u_{xx}-u_{yy}+my^{m-1}u_x=f(x,y) \qquad (7)$$

при граничных условиях (2). После замены переменных (3) уравнение (7) примет вид

$$u_{\zeta\eta}+\frac{\beta}{\eta-\zeta}u_\zeta=\frac{1}{4}\frac{f_1(\zeta,\eta)}{\left[\frac{m+1}{2}(\eta-\zeta)\right]^{2\beta}}. \qquad (8)$$

Решение уравнения (8) при граничных условиях (6) выписывается в явном виде ([4]):

$$u(\zeta,\eta)=\frac{1}{p}\int_0^\zeta(\eta-t)^{-\beta}dt\int_0^\eta f_1(t,s)(s-t)^{-\beta}ds;\qquad p=4\left(\frac{m+1}{2}\right)^{2\beta}. \qquad (9)$$

Запишем уравнение (4) в виде

$$u_{\zeta\eta}+\frac{\beta}{\eta-\zeta}u_\zeta=\frac{1}{4\left[\frac{m+1}{2}(\eta-\zeta)\right]^{2\beta}}\Bigg\{f_1(\zeta,\eta)-c_1(\zeta,\eta)u+$$
$$+(u_\zeta+u_\eta)\left[m\left(\frac{m+1}{2}\right)^{2\beta-2}(\eta-\zeta)^{2\beta-1}-a_1(\zeta,\eta)\right]\Bigg\}. \qquad (10)$$

Используя теперь формулу (9), получаем

$$u(\zeta,\eta)=\frac{1}{p}\int_0^\zeta(\eta-t)^{-\beta}dt\int_0^\eta f_1(t,s)(s-t)^{-\beta}ds-$$

$$-\frac{1}{p}\int_0^{\zeta}(\eta-t)^{-\beta}dt\int_0^{\eta}c_1(t,\ s)(s-t)^{-\beta}u(t,\ s)ds+$$

$$+\frac{1}{p}\int_0^{\zeta}(\eta-t)^{-\beta}dt\int_0^{\eta}A(t,\ s)(s-t)^{-\beta}(u_t+u_s)ds, \tag{11}$$

где

$$A(\zeta,\ \eta)\equiv m\left(\frac{m+1}{2}\right)^{2\beta-2}(\eta-\zeta)^{2\beta-1}-a_1(\eta,\ \zeta). \tag{12}$$

Третий интеграл в формуле (11) преобразуем интегрированием по частям:

$$\int_0^{\zeta}(\eta-t)^{-\beta}dt\int_0^{\eta}A(t,\ s)(s-t)^{-\beta}u_s ds+$$

$$+\int_0^{\eta}ds\int_0^{\zeta}A(t,\ s)(\eta-t)^{-\beta}(s-t)^{-\beta}u_t dt=$$

$$=\int_0^{\zeta}(\eta-t)^{-\beta}\Big\{A(t,\eta)(\eta-t)^{-\beta}u(t,\eta)-$$

$$-\int_0^{\eta}u(t,\ s)[A(t,\ s)(s-t)^{-\beta}]_s ds\Big\}dt+$$

$$+\int_0^{\eta}\Big\{A(\zeta,s)(\eta-\zeta)^{-\beta}(s-\zeta)^{-\beta}u(\zeta,s)-\int_0^{\zeta}[A(t,s)(\eta-t)^{-\beta}(s-t)^{-\beta}]_t u(t,s)dt\Big\}ds=$$

$$=\int_0^{\zeta}(\eta-t)^{-2\beta}A(t,\eta)u(t,\eta)dt+\int_0^{\eta}A(\zeta,s)(\eta-\zeta)^{-\beta}(s-\zeta)^{-\beta}u(\zeta,s)ds-$$

$$-\int_0^{\zeta}(\eta-t)^{-\beta}dt\int_0^{\eta}(s-t)^{-\beta}\left[A_s(t,s)+A_t(t,s)+\frac{\beta A(t,s)}{\eta-t}\right]u(t,s)ds. \tag{13}$$

Подставляя выражение (13) в уравнение (11), придем к интегральному уравнению для неизвестной функции $u(\zeta,\ \eta)$:

$$u(\zeta,\eta)=F(\zeta,\eta)+\frac{1}{p}\int_0^{\zeta}(\eta-t)^{-2\beta}A(t,\eta)dt+\frac{(\eta-\zeta)^{-\beta}}{p}\int_0^{\eta}(s-\zeta)^{-\beta}A(\zeta,s)u(\zeta,s)ds-$$

$$-\frac{1}{p}\int_0^{\zeta}(\eta-t)^{-\beta}dt\int_0^{\eta}(s-t)^{-\beta}\left[c_1(t,s)+\frac{\beta}{\eta-t}A(t,s)+\right.$$

$$+A_s(t,s)+A_t(t,s)\Big|\,u(t,s)ds\equiv Pu+F, \tag{14}$$

где

$$F(\zeta,\eta)\equiv\frac{1}{p}\int_0^{\zeta}(\eta-t)^{-\beta}dt\int_0^{\eta}f_1(t,s)(s-t)^{-\beta}ds.$$

2. Доказательство теоремы. Применим обычную схему последовательных приближений: $u_n=Pu_{n-1}+F$, $u_0\equiv0$, $n\geqslant1$.

Пусть функции $A(\zeta,\eta)$, $c_1(\zeta,\eta)$ и $f(\zeta,\eta)$ непрерывны в области D_1 и, кроме того, выполняются условия:

$$A_\zeta^2+A_\eta^2\leqslant\alpha^2L^2(\eta-\zeta)^{2(\alpha-1)};\quad \eta>0,\ \zeta<0,\ A(\eta,\eta)=0;. \tag{16}$$

$$|c_1(\zeta,\eta)|\leqslant L(\eta-\zeta)^{\alpha-1}; \tag{17}$$

$$|f_1(\zeta,\eta)|\leqslant M, \tag{18}$$

где $\alpha\geqslant2\beta-1$, $L=\mathrm{const}>0$. Имеет место

Лемма. *В области D_1 справедлива оценка*

$$|u_n(\zeta,\eta)|\leqslant\frac{M}{2p(1-\beta)^2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{NL}{p}\right)^k\frac{(\eta-\zeta)^{2-2\beta+k\gamma}}{(2-2\beta+\gamma)\ldots(2-2\beta+k\gamma)}, \tag{19}$$

где $\gamma=\alpha+1-2\beta$, $N=4m+6$, $n=1,2,\ldots$

Доказательство. Используя условие (16) леммы, имеем:

$$|A(\zeta,\eta)|=\left|\int_{\eta}^{\zeta}\frac{\partial A(s,\eta)}{\partial\eta}ds\right|\leqslant L(\eta-\zeta)^{\alpha}. \tag{20}$$

Применим, далее, полную индукцию. Принимая во внимание условия (16), (17), (18) и (20), получаем:

$$|u_1(\zeta,\eta)|=|F(\zeta,\eta)|\leqslant\frac{M}{p}\left|\int_0^{\zeta}(\eta-t)^{-\beta}dt\int_0^{\eta}(s-t)^{-\beta}ds\right|\leqslant\frac{M(\eta-\zeta)^{2-2\beta}}{p(1-\beta)(2-2\beta)};$$

$$|u_{n+1}(\zeta,\eta)|\leqslant\frac{M(\eta-\zeta)^{2-2\beta}}{p(1-\beta)(2-2\beta)}+\frac{M}{p^2(1-\beta)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{L^{k+1}N^k(\eta-\zeta)^{2-2\beta+(k+1)\gamma}}{p^k(2-2\beta)\ldots(2-2\beta+k\gamma)}\times$$

$$\times\left[\frac{1}{2-2\beta+(k+1)\gamma}+\frac{1}{2-2\beta+(k+1)\gamma-\beta}+\right.$$

$$+\frac{1}{[2-2\beta+(k+1)\gamma](2-2\beta+k\gamma+\alpha-\beta)}+$$

$$+\frac{\beta}{[2-2\beta+(k+1)\gamma](2-2\beta+k\gamma+\alpha-\beta+1)}+$$

$$\left.+\frac{2\alpha}{[2-2\beta+(k+1)\gamma](2-2\beta+k\gamma+\alpha-\beta)}\right]\leqslant\frac{M(\eta-\zeta)^{2-2\beta}}{p(1-\beta)(2-2\beta)}+$$

$$+\frac{M}{p^2(1-\beta)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{L^{k+1}N^k(\eta-\zeta)^{2-2\beta+(k+1)\gamma}}{p^k(2-2\beta)\ldots(2-2\beta+k\gamma)[2-2\beta+(k+1)\gamma]}\times$$

$$\times\left[2+\frac{2\alpha-1}{2-2\beta+k\gamma+\alpha-\beta}+\frac{\beta}{2-2\beta+k\gamma+\alpha-\beta+1}\right]. \qquad (21)$$

Легко видеть, что

$$2+\frac{2\alpha+1}{2-2\beta+k\gamma+\alpha-\beta}+\frac{\beta}{2-2\beta+k\gamma+\alpha-\beta+1}\leqslant 2+\frac{2\alpha+\beta+1}{2-3\beta+\alpha+k\gamma}\leqslant$$

$$\leqslant 2+\frac{2\alpha+\beta+1}{1-\beta}\leqslant 2+4(m+1)=4m+6. \qquad (22)$$

Подставляя оценку (22) в формулу (21), получаем окончательно

$$|u_{n+1}|\leqslant\frac{M(\eta-\zeta)^{2-2\beta}}{p(1-\beta)(2-2\beta)}+$$

$$+\frac{M}{p^2(1-\beta)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(LN)^{k+1}(\eta-\zeta)^{2-2\beta+(k+1)\gamma}}{p^k(2-2\beta)\ldots(2-2\beta+k\gamma)[2-2\beta+(k+1)\gamma]},$$

откуда и следует оценка (19).

Нетрудно видеть, что оценка (19) может быть выведена и из аналогично доказываемого неравенства

$$|u_n-u_{n-1}|\leqslant M\frac{(NL)^{n-1}(\eta-\zeta)^{2-2\beta+(n-1)\gamma}}{p^n(1-\beta)(2-2\beta)\ldots[2-2\beta+(n-1)\gamma]},\quad n\geqslant 1. \qquad (23)$$

Полученные оценки (19) и (23) описывают скорость сходимости итерационного процесса в зависимости от значений α.

Пусть $\alpha=2\beta-1$. Тогда $\gamma=0$ и оценки (19) и (23) принимают, соответственно, вид:

$$|u_n(\zeta,\ \eta)|\leqslant M\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(LN)^k(\eta-\zeta)^{2-2\beta}}{(2p)^{k+1}(1-\beta)^{k+2}}\leqslant\frac{(\eta-\zeta)^{2-2\beta}M}{(1-\beta)[2p(1-\beta)-LN]}; \qquad (24)$$

$$|u_n(\zeta,\ \eta)-u_{n-1}(\zeta,\ \eta)|\leqslant M\frac{(LN)^{n-1}(\eta-\zeta)^{2-2\beta}}{(2p)^n(1-\beta)^{n+1}}. \qquad (25)$$

Последовательность $\{u_n(\zeta,\ \eta)\}$ будет равномерно сходиться в $\overline{D}_1$ к непрерывной функции $u(\zeta,\ \eta)$, если потребовать выполнения условия

$$L<\frac{2p(1-\beta)}{N}=\frac{2p}{(4m+6)(m+1)}. \qquad (26)$$

Легко видеть, что предельная функция $u(\zeta,\ \eta)$ будет решением интегрального уравнения (14). Единственность решения и его устойчивость следуют из того, что разность $v(\zeta,\ \eta)$ двух решений удовлетворяет оценке

$$|v(\zeta,\ \eta)|\leqslant\frac{M}{2p(1-\beta)}\left(\frac{NL}{2(1-\beta)}\right)^{n-1}(\eta-\zeta)^{2-2\beta}$$

при любом n, и, следовательно, $v(\zeta,\ \eta)\equiv 0$.

Если $\alpha\geqslant 2\beta-1$, то $\gamma>0$ и последовательность $\{u_n(\zeta,\ \eta)\}$ будет равномерно сходиться в любой, достаточно малой, окрестности начала координат при любом значении константы L, причем скорость сходимости будет факториальной.

Формально продифференцировав уравнение (14) по ζ (или η) и применяя оценки типа (23), по известной схеме получаем, что не только удовлетворяются условия задачи (1), (2), но и гладкость решения u соответственно повышается с повышением гладкости коэффициентов уравнения (1).

Сделаем теперь несколько замечаний.

1°. Все вышеприведенные результаты остаются в силе, если рассматривать уравнение

$$y^{2m}K(x, y)u_{xx}-u_{yy}+a(x, y)u_x+b(x, y)u_y+c(x, y)u=f(x, y),$$

где $K(x, y)$—достаточно гладкая функция, удовлетворяющая условию

$$K(x, y)\geqslant \mathrm{const}>0.$$

2°. Условие теоремы можно заменить более общим условием

$$\frac{1}{4}\left(\frac{2m}{m+1}y^{m-1}\pm a(x, y)\right)_y^2+y^{2m}a_x^2(x, y)\leqslant L^2\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^2 y^{2(m-2)},$$

имеющим место хотя бы в одном из случаев ($\pm$).

3°. Нетрудно видеть, что в зависимости от условий на коэффициенты уравнения (1) можно было бы допустить неограниченность определенного порядка функции $f(x, y)$ при $y\to 0$.

4°. Используя функцию типа Миттаг—Лефлера $E_\rho(z, \mu)$, ([5]), оценку для $u(\zeta, \eta)$ можно представить в виде

$$|u(\zeta, \eta)|\leqslant\frac{\Gamma\left(\frac{2-2\beta}{\gamma}\right)(\eta-\zeta)^{2-2\beta}}{2p\gamma(1-\beta)}E_1\left(\frac{NL}{p\gamma}(\eta-\zeta)^\gamma, \frac{2-2\beta}{\gamma}\right)\cdot M,$$

и, следовательно, ([5]),

$$|u(\zeta, \eta)|\leqslant\frac{\Gamma\left(\frac{2-2\beta}{\gamma}\right)(\eta-\zeta)^{2-2\beta}}{2p\gamma(1-\beta)}\times$$

$$\times\left\{\left[\frac{NL}{p\gamma}(\eta-\zeta)^\gamma\right]^{1-\frac{2-2\beta}{\gamma}}\cdot\exp\left[\frac{NL(\eta-\zeta)^\gamma}{p\gamma}\right]+\frac{c_1}{1+\frac{NL}{p\gamma}(\eta-\zeta)^\gamma}\right\}\cdot M,$$

что описывает степень устойчивости решения задачи (1), (2) относительно f (см. (18)).

5°. Очевидно, что условия 1)—3) теоремы легко переносятся на случай общей задачи (0.1), (0.2).

Институт математики
Академии наук Армянской ССР
Ереванский государственный университет

Աստիճանային վերացում ունեցող երկրորդ կարգի հիպերբոլական հավասարման համար Գուրսայի խնդրի կոռեկտության բավարար պայմանների մասին

Դիտարկվում է Գուրսայի խնդիրը

$$y^{2m}u_{xx}-u_{yy}+a(x, y)u_x+b(x, y)u_y+c(x, y)u=f(x, y)$$

հավասարման համար, երբ $u(x, y)$ *ֆունկցիան հայտնի է* (0,0) *կետից ելնող խարակտերիստիկների վրա։*

Բացահայտվում են խնդրի կոռեկտության բավարար պայմանները։ Հիմնական սահմանափակումը դրվում է $a(x, y)$ *գործակցի վրա և ունի հետևյալ տեսքը.*

$$\frac{1}{4}\left(\frac{2m}{m+1}y^{m-1}-a(x, y)\right)_y^2+y^{2m}a_x^2(x, y)\leqslant L^2\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^2 y^{2(m-2)}$$

որտեղ՝

$$L=\text{const}>0,\qquad L<2\left(\frac{m+1}{2}\right)^{2\beta-1}\frac{1}{4m+6},\quad \beta=\frac{m}{m+1}$$

Ապացույցի հիմքում ընկած է հաջորդական մոտավորությունների եղանակի կիրառությունը համապատասխան ինտեգրալ հավասարման համար։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Т. Ш. Кальменов*, Дифференциальные уравнения, т. 8, № 1 (1972). [2] *В. Н. Врагов*. Дифференциальные уравнения, т. 8, № 1 (1972). [3] *Б. А. Бубнов*, Сибирский мат. журн., т. 19, № 2 (1978). [4] *М. М. Смирнов*, Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения, Наука, М., 1966. [5] *М. М. Джрбашян*, Интегральные преобразования в комплексной области, Наука, М., 1966.