ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXIII 1981 1

УДК 517.544

МАТЕМАТИКА

В. С. Захарян, А. Г. Унанян

Изменение на отрезке потенциала типа Грина

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 31/X 1980)

1. Пусть D единичный круг, а μ неотрицательное распределение массы на D. Рассмотрим потенциал Грина

$$U_0(z)=\int\limits_D G(z, \xi)d\mu(\xi),$$

где $G(z, \xi)$ функция Грина для D.

Карлесоном [1] доказана следующая

Теорема. *Пусть* $0<\rho<1$ *и*

$$\int\limits_D (1-|\xi|)^\beta d\mu(\xi)<\infty$$

для некоторого фиксированного β, $0<\beta<1$. *Тогда для всех* γ, $0<\gamma<2\pi$, *кроме, быть может, некоторого множества с нулевой* β-*хаусдорфовой мерой при* $0<\beta<1$ *и с нулевой логарифмической емкостью при* $\beta=0$, *функция* $U_0(z)$ *имеет конечное изменение на отрезке, соединяющем точки* $\rho e^{i\gamma}$ *и* $e^{i\gamma}$.

Отметим, что под конечным изменением на отрезке $[\rho e^{i\gamma}, e^{i\gamma}]$ понимаем конечность следующего интеграла:

$$\int\limits_\rho^1 \left|\frac{\partial U_0(re^{i\gamma})}{\partial r}\right| dr.$$

Этот результат обобщен [2] одним из авторов для того случая, когда в условии теоремы Карлесона функция $(1-|\xi|)^\beta$ заменена функцией $h(1-|\xi|)$, удовлетворяющей некоторым условиям, и в терминах меры Хаусдорфа, ассоциированной с функцией h, описывается мера того исключительного множества, на котором изменение функции $U_0(z)$ бесконечно.

Определим теперь при ξ, $z\in D$ функцию

$$A_\alpha(z, \xi) = \left(1 - \frac{z}{\xi}\right) \cdot \exp\{-W_\alpha(z; \xi)\} \quad (-1<\alpha<\infty), \tag{1}$$

где

$$W_\alpha(z; \xi) = \int_{|\xi|}^{1} \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)} \cdot \left\{ \xi^{-k} \int_0^{|\xi|} (1-x)^\alpha x^{k-1} dx - \right.$$

$$\left. - \xi^{-k} \int_{|\xi|}^{1} (1-x)^\alpha x^{-k-1} dx \right\} z^k. \tag{1'}$$

Следующую функцию назовем функцией типа Грина:

$$G_\alpha(z; \xi) = \log |A_\alpha(z; \xi)|; \quad z; \xi \in D. \tag{2}$$

Функция $A_\alpha(z; \xi)$ введена М. Джрбашяном при построении им теории факторизации классов $N_\alpha(-1<\alpha<\infty)$—мероморфных в единичном круге функций.

Заметим, что из (1), согласно (1′), имеем

$$A_0(z; \xi) = \frac{\xi - z}{1 - \bar{\xi} z} \cdot \frac{|\xi|}{\xi}; \tag{3}$$

следовательно, из (2) при $\alpha = 0$ получим функцию

$$G_0(z; \xi) = \log \left| \frac{1 - z \cdot \bar{\xi}}{\xi - z} \right|, \tag{4}$$

которая совпадает с обычной функцией Грина для D.

Потенциал типа Грина определим следующим образом:

$$U_\alpha(z) = \int_D G_\alpha(z; \xi)\, d\mu(\xi). \tag{5}$$

В настоящей заметке приводятся теоремы о конечности радиального изменения функции $U_\alpha(z)$.

2. Из определения (2) функции $G_\alpha(z; \xi)$, согласно (1), легко усмотреть, что

$$G_\alpha(z; \xi) = \mathrm{Re}\,[W_0(z, \xi) - W_\alpha(z; \xi)] - \log |A_0(z; \xi)|. \tag{6}$$

Для дальнейшего заметим, что, как известно ([4]),

$$|\operatorname{grad} [W_0(z; \xi) - W_\alpha(z; \xi)]| \leqslant c \cdot \frac{(1-|\xi|)^{1+\alpha}}{|1 - z\bar{\xi}|^{2+\alpha}}; \quad \begin{matrix} z; \xi \in D \\ (-1<\alpha<0), \end{matrix} \tag{7}$$

где c—как здесь, так и в дальнейшем абсолютная постоянная.

С помощью простых вычислений будем иметь также

$$|\operatorname{grad} G_0(z; \xi)| \leqslant \frac{1 - |\xi|^2}{|1 - z\bar{\xi}| \cdot |z - \xi|}. \tag{8}$$

Имея в виду (7) и (8) и равенство (6), получим:

$$|\operatorname{grad} G_\alpha(z;\xi)| \leqslant c\,\frac{(1-|\xi|)^{1+\alpha}}{|1-z\bar{\xi}|^{2+\alpha}} + \frac{1-|\xi|^2}{|1-z\bar{\xi}|\,|z-\xi|} \qquad (-1<\alpha<0). \tag{9}$$

Заметим, что для сходимости произведений $\prod\limits_k A_\alpha(z;\xi_k)$ существует условие, аналогичное условию Бляшке ([3]): для того, чтобы $\prod\limits_k A_\alpha(z;\xi_k)$ было сходимо, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_1^\infty (1-|\xi_k|)^{1+\alpha} < +\infty,$$

поэтому естественно для существования потенциала (5) потребовать условие

$$\int_D (1-|\xi|)^{1+\alpha} d\mu(\xi) < +\infty. \tag{10}$$

3. Следующая теорема дает важное граничное свойство для потенциала типа Грина.

Теорема 1. *Пусть μ вполне аддитивная, неотрицательная функция в D. Если*

$$\int_D (1-|\xi|)^{1+\alpha} d\mu(\xi) < +\infty, \quad -1<\alpha<0,$$

то для всех γ, $0<\gamma<2\pi$, кроме, быть может, некоторого множества E с нулевой $(1+\alpha)$-емкостью, функция $U_\alpha(z)$ $(-1<\alpha<0)$ имеет конечное изменение на отрезке, соединяющем точки $\rho e^{i\gamma}$ и $e^{i\gamma}$, т. е.

$$\int_\rho^1 \left|\frac{\partial U_\alpha(re^{i\gamma})}{\partial r}\right| dr < +\infty; \quad -1<\alpha<0 \tag{11}$$

при $\gamma \in [0, 2\pi] \setminus E$

Доказательство. Вспомним, что под $(1+\alpha)$-емкостью понимается величина

$$C_{1+\alpha}(E) = \frac{1}{\inf\limits_\mu \sup\limits_z \displaystyle\int_E \frac{d\mu(\xi)}{|z-\xi|^{1+\alpha}}}. \tag{12}$$

Следовательно, для исключительного множества E_0 должны получить $C_{1+\alpha}(E_0)=0$; это значит, что

$$\int_{E_0} \frac{d\mu(\xi)}{|z-\xi|^{1+\alpha}} = +\infty \quad \text{для любой меры } \mu(\xi).$$

Докажем, что если существует на E_0 мера $\mu_1(\theta)$ такая, что

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\mu_1(\theta)}{|z-\xi|^{1+\alpha}} < C_1, \tag{13}$$

т. е. $C_{1+\alpha}(E_0)\neq 0$, то на этом множестве изменение потенциала $U_\alpha(z)$ остается конечным. Очевидно, что этим теорема будет доказана. Из неравенства (9) получим:

$$\int_\rho^1 \left|\frac{\partial U_\alpha(re^{i\gamma})}{\partial r}\right| dr < c\int_\rho^1 dr\int_D \frac{(1-|\xi|)^{1+\alpha}}{|1-z\bar{\xi}|^{2+\alpha}}\,d\mu(\xi)+$$

$$+\int_\rho^1 dr\int_D \frac{1-|\xi|^2}{|1-z\bar{\xi}|\cdot|z-\xi|}\,d\mu(\xi)=I_1+I_2.$$

То, что I_2 остается ограниченным на $[0, 2\pi]$ кроме, быть может, некоторого множества с нулевой $(1+\alpha)$-емкостью $(-1<\alpha<0)$, доказано в работе (1).

Остается это доказать для I_1.

Если покажем, что

$$\int_0^{2\pi} I_1(\gamma)\,d\mu_1(\theta)<+\infty,$$

то это означает, что $I_1<+\infty$ вне некоторого множества, которое имеет нулевую $(1+\alpha)$-емкость.

$$\int_0^{2\pi} I_1(\gamma)\,d\mu_1(\theta)=c\int_0^{2\pi}\left\{\int_\rho^1 dr\int_D \frac{(1-|\xi|)^{1+\alpha}}{|1-z\bar{\xi}|^{2+\alpha}}\,d\mu(\xi)\right\}d\mu_1(\theta)=$$

$$=\int_D (1-|\xi|)^{1+\alpha}\,d\mu(\xi)\int_\rho^1 dr\int_0^{2\pi}\frac{d\mu_1(\theta)}{|1-z\bar{\xi}|^{2+\alpha}}. \tag{14}$$

Оценим последний интеграл.

Заметим, что

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\mu_1(\theta)}{|1-z\bar{\xi}|^{2+\alpha}}\leqslant\frac{1}{1-r\rho}\int_0^{2\pi}\frac{d\mu_1(\theta)}{|1-z\bar{\xi}|^{1+\alpha}}.$$

Используя следующее неравенство:

$$|1-z\bar{\xi}|\geqslant\frac{1}{2}\,|e^{i\gamma}-\xi|,$$

имеем:

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\mu_1(\theta)}{|1-z\bar{\xi}|^{2+\alpha}}\leqslant\frac{2^{1+\alpha}}{1-r\rho}\int_0^{2\pi}\frac{d\mu_1(\theta)}{|e^{i\gamma}-\xi|^{1+\alpha}}.$$

Но ввиду неравенства (13), которое имеет место и при $|z|=1$, получим

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\mu_1(\theta)}{|e^{i\gamma}-\xi|^{1+\alpha}} < c_1.$$

Значит,

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\mu_1(\theta)}{|1-z\bar{\xi}|^{2+\alpha}} \leqslant \frac{c_1 \cdot 2^{1+\alpha}}{1-r\rho} = \frac{c_0}{1-r\rho}.$$

Используя (15) и (14), получим, что

$$\int_0^{2\pi} I_1(\gamma) d\mu_1(\theta) \leqslant c \cdot c_0 \int_D (1-|\xi|)^{1+\alpha} d\mu(\xi) \int_\rho^1 \frac{dr}{1-r\rho} =$$

$$= c \cdot c_0 \frac{1}{\rho} \log(1+\rho) \int_D (1-|\xi|)^{1+\alpha} d\mu(\xi) = \frac{c \cdot c_0}{\rho} \log(1+\rho) \int_D (1-|\xi|)^{1+\alpha} d\mu(\xi).$$

Но так как нас интересуют те значения ρ, которые близки к 1, то можем принять, что

$$c \cdot c_0 \frac{\log(1+\rho)}{\rho} \leqslant \mathrm{d},$$

а согласно условию теоремы

$$\int_D (1-|\xi|)^{1+\alpha} d\mu(\xi) < N.$$

Таким образом,

$$\int_0^{2\pi} I_1(\gamma) d\mu_1(\theta) \leqslant \mathrm{d} \cdot N = A_0,$$

где d, N и A_0 абсолютные постоянные.

Значит,

$$\int_\rho^1 dr \int_D \frac{(1-|\xi|)^{1+\alpha}}{|1-z\bar{\xi}|^{2+\alpha}} d\mu(\xi) < +\infty$$

всюду, кроме, быть может, некоторого множества E, $(1+\alpha)$-емкость которого равна нулю.

Так как из конечности радиального изменения вытекает существование радиального предела, то из этой теоремы получим важное граничное свойство для потенциала типа Грина:

Теорема 2. *Потенциал типа Грина* $U_\alpha(z)$ $(-1<\alpha<0)$ *во всех точках единичного круга имеет граничные пределы*

$$U_\alpha(e^{i\gamma}) = \lim_{r=1-0} U_\alpha(re^{i\gamma}),$$

кроме, быть может, некоторого множества, $(1+\alpha)$-емкость которого равна нулю.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Վ. Ս. ԶԱՔԱՐՅԱՆ, Ա. Դ. ՀՈՒՆԱՆՅԱՆ

Գրինի տիպի պոտենցիալի եզրային սահմանները

Կատարված աշխատանքում դիտարկված է Գրինի տիպի պոտենցիալը և ուսումնասիրված է նրա փոփոխությունը հատվածի վրա։ Աշխատանքը շարադրելու համար օգտագործված են Կառլեսոնի և Ջրբաշյանի կողմից ներմուծված գաղափարներ և դրանց որոշ առնչություններ։ Դրանք շարադրված են հոդվածի առաջին և երկրորդ մասերում։

Աշխատանքի հիմքը կազմող երկու թեորեմները, որոնք բացահայտում են Գրինի տիպի պոտենցիալի վարքը հատվածի վրա և շրջանի եզրին, բերված են երրորդ մասում և հետևյալն են.

Թեորեմ. 1. Թող μ-լիովին ադիտիվ, ոչ բացասական ֆունկցիա է D-ում։ Եթե

$$\int_D (1-|\xi|)^{1+\alpha} d\mu(\xi) < +\infty \quad -1<\alpha<0,$$

ապա բոլոր γ-երի համար՝ $0<\gamma<2\pi$, բացի միգուցե ինչ որ E բազմությունից, որի $(1+\alpha)$ ունակությունը 0 է, $U_\alpha(z)$ $(-1<\alpha<0)$ ֆունկցիան $\rho e^{i\gamma}$ և $e^{i\gamma}$ կետերը միացնող հատվածի վրա ունի վերջավոր փոփոխություն, այսինքն՝

$$\int_\rho^1 \left| \frac{\partial U_\alpha(re^{i\gamma})}{\partial r} \right| dr < +\infty \quad -1<\alpha<0,$$

երբ $\gamma \in [0, 2\pi] \setminus E$

Թեորեմ. 2. Գրինի տիպի պոտենցիալը՝ $U_\alpha(z)$-ը $(-1<\alpha<0)$ միավոր շրջանի բոլոր կետերում ունի եզրային սահմաններ.

$$U_\alpha(e^{i\gamma}) = \lim_{r=1-0} U_\alpha(re^{i\gamma})$$

բացի միգուցե ինչ որ բազմությունից, որի $(1+\alpha)$-ունակությունը հավասար է 0-ի։

Երկրորդ թեորեմի ապացույցը բերված չէ, քանի որ այն հետևում է առաջին թեորեմից։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *L. Carleson*, On a Class of Meromorphic Functions and Its Associated Exceptional Sets, Uppsala 1950 [2] *В. С. Закарян*, Изв. АН СССР, сер. мат., т. 27, № 4 (1963). [3] *М. М. Джрбашян*, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, Наука, М., 1966 [4] *В. С. Закарян*, ДАН АрмССР, т. 56, № 4 (1978).