

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

Академик АН Армянской ССР М. М. Джрбашян, С. Г. Рафаелян

О целых функциях экспоненциального типа из весовых классов L_p

(Представлено 27/V 1981)

В общих результатах об интерполяционных рядах, порожденных нулями целых функций типа синуса, установленных Б. Я. Левиным (¹), в качестве частного случая содержится известная теорема В. А. Котельникова в следующей формулировке.

Для любой последовательности $\{a_k\} \in l^p$ ($1 < p < +\infty$) ряд

$$f(z) = \sigma^{-1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k a_k \frac{\sin \sigma z}{z - \frac{\pi}{\sigma} k} \quad (0 < \sigma < +\infty) \quad (1)$$

равномерно сходится в любом круге $|z| \leq R$, а также по норме $L_p(-\infty, +\infty)$ и дает отображение всего пространства l^p на все пространство целых функций $f(z)$ экспоненциального типа $\leq \sigma$, причем

$$c_1 \|f\|_p^p \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^p \leq c_2 \|f\|_p^{p^{**}} \text{ и } a_k = f\left(\frac{\pi}{\sigma} k\right), \quad (2)$$

где $c_j > 0$ ($j = 1, 2$) — постоянные, не зависящие от f .

Цель настоящей заметки распространить этот результат на случай весовых пространств класса $l^{p,x}$ последовательностей $\{a_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ с конечной нормой

$$\|\{a_k\}\|_{p,x} = \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^p (1 + |k|)^x \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \quad (3)$$

* Формула эта при иных условиях на функцию f известна давно (см. (²), задачу 165.)

** В дальнейшем вместо такого рода двойных неравенств будем употреблять символ $\asymp$.

и класса $W_{\sigma}^{p,x}$ целых функций $f(z)$ экспоненциального типа $\leq \sigma$ с нормой

$$\|f\|_{p,x} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p |x|^x dx \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty. \quad (4)$$

Ниже мы приведем несколько обозначений и наметим доказательства ряда лемм.

1. Пусть $W_{\sigma}^{p,x}[\nu]$ — подмножество множества E_{σ} целых функций $f(z)$ экспоненциального типа $\leq \sigma$ с нормой

$$\|f\|_{p,x,\nu} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p (x^2 + \nu^2)^{\frac{x}{2}} dx \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty, \quad (5)$$

где $1 < p < +\infty$, $-1 < x < +\infty$, $-\infty < \nu < +\infty$. Заметим, что

$$W_{\sigma}^{p,x}[0] \equiv W_{\sigma}^{p,x} \text{ и } \|f\|_{p,x,0} = \|f\|_{p,x}.$$

Пусть $G^{(\pm)} = \{z; \operatorname{sign} \operatorname{Im} z = \pm 1\}$ — взаимно дополнительные полуплоскости плоскости z , а $H_{\pm}^p$ — классы аналитических в соответствующих полуплоскостях функций $\varphi^{\pm}(z)$, для которых соответственно

$$\|\varphi^{\pm}\|_p = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi^{\pm}(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{0 < \pm y < +\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi^{\pm}(x + iy)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty, \quad (6)$$

при том же условии $1 < p < +\infty$.

Из хорошо известных результатов (см. (1), теорему 4.6, а также (2), теорему 6.7.1) непосредственно следует

Лемма 1. Если $f(z) \in W_{\sigma}^{p,x}[\nu]$, то:

$$1^{\circ}. \varphi^{\pm}(z) \equiv f(z)(z \pm i\nu)^{\frac{x}{p}} e^{\pm i\sigma z} \in H_{\pm}^p; \quad (7)$$

$$2^{\circ}. \|f(x + i\nu)\|_{p,x,\nu} \leq e^{\sigma|\nu|} \|f\|_{p,x}, \quad \forall \nu \in (-\infty, +\infty). \quad (8)$$

Лемма 2. Классы $W_{\sigma}^{p,x}[\nu]$ ($-\infty < \nu < +\infty$) с нормами $\|f\|_{p,x,\nu}$ являются банаховыми пространствами.

Действительно, во-первых, поскольку

$$|f(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z + \rho e^{i\theta})| d\theta, \quad z = x + iy,$$

то пользуясь неравенством Гельдера, получим оценку вида

$$|f(z)| \leq c_1 |z|^{-\frac{x}{p}} \left(\int_{y-1}^{y+1} d\eta \int_{x-1}^{x+1} |f(\xi + i\eta)|^p |\xi + i\eta + i\nu|^p d\xi \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$|z| \geq 2(1 + |\nu|),$$

откуда в силу неравенства (8) следует также оценка

$$|f(z)| \leq c_2 (1+|z|)^{-\frac{1}{p}} e^{\lambda|y|} \|f\|_{p,x,v}, \quad 0 \leq |z| < +\infty, \quad (9)$$

где $c_2 > 0$ не зависит от f^* . Из неравенства (9) легко будет следовать полнота всех пространств $W_{\sigma}^{p,x}[v]$ ($-\infty < v < +\infty$).

II. Тожественность множеств $W_{\sigma}^{p,x}[v]$ и $W_{\sigma}^{p,x}[0]$ очевидна, хотя нормы у этих пространств различны.

Лемма 3. Для любой функции $f(z) \in W_{\sigma}^{p,x}$ ($1 < p < +\infty, -1 < x < +\infty$) и при любом $-\infty < v < +\infty$ будем иметь:

$$1^{\circ}. \|f\|_{p,x,v} \geq \|f\|_{p,x}; \quad (10)$$

$$2^{\circ}. \|f(x+iv)\|_{p,x} \geq \|f\|_{p,x}, \quad \forall v \in (-\infty, +\infty). \quad (11)$$

1°. На $W_{\sigma}^{p,x}[0]$ определим оператор T , положив $Tf = f \in W_{\sigma}^{p,x}[v]$, где $v \in (-\infty, +\infty)$ — данное число. Ясно, что T отображает все $W_{\sigma}^{p,x}[0]$ на все $W_{\sigma}^{p,x}[v]$, т. е. имеется обратный оператор T^{-1} такой, что при

$$f \in W_{\sigma}^{p,x}[v], \quad T^{-1}f = f \in W_{\sigma}^{p,x}[0].$$

Разберем отдельно два случая:

1) Если $x \geq 0$, то $|x|^2 \leq |x+iv|^2$, и очевидно,

$$\|f\|_{p,x} \leq \|f\|_{p,x,v} = \|Tf\|_{p,x,v}, \quad \forall f \in W_{\sigma}^{p,x}[0], \quad (12)$$

откуда следует, что

$$\|T^{-1}f\|_{p,x} \leq \|f\|_{p,x}, \quad \forall f \in W_{\sigma}^{p,x}[v],$$

т. е. оператор T^{-1} ограничен. По теореме Банаха ограничен и оператор T , т. е.

$$\|Tf\|_{p,x,v} = \|f\|_{p,x,v} \leq A_1 \|f\|_{p,x}. \quad (13)$$

Из (12) и (13) следует (10) в случае $x \geq 0$.

2) Если $-1 < x < 0$, то $|x+iv|^2 \leq |x|^2$ и поэтому для любого $f \in W_{\sigma}^{p,x}[0]$

$$\|Tf\|_{p,x,v} = \|f\|_{p,x,v} \leq \|f\|_{p,x}, \quad (14)$$

т. е. оператор T ограничен. Поэтому обратный оператор T^{-1} также ограничен и, следовательно,

$$\|T^{-1}f\|_{p,x} = \|f\|_{p,x} \leq A_1 \|f\|_{p,x,v}, \quad \forall f \in W_{\sigma}^{p,x}. \quad (15)$$

Из (14) и (15) вытекает (10) и в этом случае.

2°. Отметим, что из (10), заменив функцию $f(z)$ на $f(z \pm iv)$, в силу (8) мы получим неравенство

$$\|f(x \pm iv)\|_{p,x} \leq A_1 \|f(x \pm iv)\|_{p,x,v} \leq A_1 e^{\lambda|v|} \|f\|_{p,x} \quad (16)$$

для любого $v \in (-\infty, +\infty)$.

Положив $\varphi(z) = f(z+iv)$, в силу (16) для функции φ будем иметь

* Здесь и в дальнейшем зависимость постоянных от остальных параметров p, x, v, σ и т. д., как правило, мы специально отмечать не будем.

$$\|\varphi(x - iy)\|_{p,x} \leq A_1 e^{\alpha|y|} \|\varphi\|_{p,x},$$

или, что то же самое,

$$\|f\|_{p,x} \leq A_1 e^{\alpha|y|} \|f(x + iy)\|_{p,x}. \quad (17)$$

Из (16) и (17) следует утверждение (11).

III. Лемма 4. Если $f(z) \in W_{\frac{\alpha}{2}}^{p,x}$ ($1 < p < +\infty$, $x > -1$), то для любых $h \in (-\infty, +\infty)$ и $\alpha \in (0, +\infty)$

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |f(\alpha k + ih)|^p (1 + |k|)^x \right)^{\frac{1}{p}} \leq c \|f\|_{p,x} \quad (18)$$

где $c > 0$ от f не зависит.

Рассмотрим в плоскости z с разрезом $(-\infty, 0)$ функции $f(\pm z + ih)z^{x/p}$. Если $x = 0$, то для любого $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, если же $x \neq 0$, то для $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, очевидно, справедливы неравенства

$$|f(\alpha k + ih)| |k|^{\frac{x}{p}} \leq \frac{\alpha^{-\frac{x}{p}}}{2\pi} \int_{|\zeta - \alpha k| = \rho} |f(\zeta + ih)| |\zeta|^{\frac{x}{p}} |d\zeta|, \quad 0 < \rho < \frac{\alpha}{2}.$$

Умножая на $\rho d\rho$ и интегрируя по интервалу $(0, \alpha/2)$, в силу неравенства Гельдера следует

$$|f(\alpha k + ih)|^p |k|^x \leq \frac{4}{\pi \alpha^{x+2}} \int \int_{|\zeta - \alpha k| \leq \frac{\alpha}{2}} |f(\zeta + ih)|^p |\zeta|^x |d\zeta|, \quad |k| \geq 1, \quad (19)$$

и, следовательно,

$$\sum_{|k| \geq 1} |f(\alpha k + ih)|^p |k|^x \leq c^2 \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} d\eta \int_{|\zeta| \geq \frac{\alpha}{2}} |f(\zeta + ih + i\eta)|^p (\zeta^2 + \eta^2)^{\frac{x}{2}} d\zeta.$$

Но в силу (10) и (11)

$$\int_{|\zeta| \geq \frac{\alpha}{2}} |f(\zeta + i(h + \eta))|^p (\zeta^2 + \eta^2)^{\frac{x}{2}} d\zeta \leq \|f(\zeta + i(h + \eta))\|_{p,x,\eta}^p \leq$$

$$\leq c_1 \|f(\zeta + i(h + \eta))\|_{p,x}^p \leq c_2 \|f\|_{p,x}^p,$$

и поэтому

$$\sum_{|k| \geq 1} |f(\alpha k + ih)|^p (1 + |k|)^x \leq c_3 \|f\|_{p,x}^p. \quad (20)$$

Но из неравенства (9) следует, что

$$|f(ih)|^p \leq c_4 \|f\|_{p,x}^p,$$

откуда и из (20) следует неравенство (18) леммы.

Условимся, наконец, обозначать через $H_{\pm}^{p,x}$ соответственно классы аналитических в полуплоскостях $G^{(\pm)}$ функций $\varphi^{\pm}(z)$, для которых

$$\varphi^{\pm}(z)z^{\frac{x}{p}} \in H_1^p.$$

Тогда согласно (6) справедливо неравенство

$$\|\psi^{\pm}(x+iy)\|_{p,x} \leq \|\psi^{\pm}\|_{p,x},$$

пользуясь которым, аналогичным способом, но несколько проще получим следующую лемму.

Лемма 4'. Если $\psi^{\pm}(z) \in H_{\pm}^{p,x}$, то соответственно будем иметь

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\psi^{\pm}(zk+ih)|^p (1+|k|)^x \leq c \|\psi^{\pm}\|_{p,x}^p. \quad (18')$$

IV. Ниже мы будем опираться на следующую теорему о представлении и оценке линейного функционала в весовых классах, которая следует из теоремы 4 работы (4) и из теоремы Хана—Банаха.

Теорема А. Пусть ϕ —ограниченный линейный функционал, заданный на пространстве $H_+^{p,x}$ ($1 < p < +\infty$, $-1 < x < p-1$). Тогда существует единственная функция $G(z) \in H_-^{q,x_1}$ ($q = \frac{p}{p-1}$, $x_1 = -\frac{q}{p}x$) такая, что:

$$1^\circ. \phi[F] = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)G(x)dx, \quad \forall F \in H_+^{p,x}; \quad (21)$$

$$2^\circ. \|F\|_{p,x} \leq \sup_{\|G\|_{q,x_1} \leq B_{p,\omega}} |\phi[F]| = \sup_{\|G\|_{q,x_1} \leq B_p} \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)G(x)dx \right\|, \quad (22)$$

где $B_{p,x} > 0$ не зависит от F .

Лемма 5. Если $\{a_k\} \in l^{p,x}$ ($1 < p < +\infty$, $-1 < x < +\infty$), то ряд (1) равномерно сходится в любом круге $|z| \leq R$, и его сумма $f(z)$ будет целой функцией, удовлетворяющей интерполяционным условиям

$$f\left(\frac{\pi}{\sigma}k\right) = a_k \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (23)$$

Для любого R существует целое число $N=N(R) \geq 1$ такое, что $\left|z - \frac{\pi}{\sigma}k\right| \geq \frac{\pi|k|}{2\sigma}$, при $|z| \leq R$ и $|k| \geq N$. Если $m > n \geq N$ или $n < m \leq -N$, то при $|z| \leq R$

$$J_{n,m}(z) = \left| \sum_{k=n+1}^m (-1)^k a_k \frac{\sin \sigma z}{z - \frac{\pi}{\sigma}k} \right| \leq \frac{2\sigma \operatorname{sh} \sigma R}{\pi} \sum_{k=n+1}^m |a_k| |k|^{-1}.$$

Отсюда, пользуясь неравенством Гельдера, получим

$$J_{n,m}(z) \leq c \frac{2\sigma \operatorname{sh} \sigma R}{\pi} \|a_k\|_{p,x} \left\{ \sum_{k=n+1}^m |k|^{-\left(1+\frac{x}{p}\right)q} \right\}^{\frac{1}{q}}, \quad |z| \leq R,$$

откуда, поскольку $\left(1 + \frac{x}{p}\right)q > 1$, мы заключаем о справедливости всех утверждений леммы.

Теорема 1. При условии $\{a_k\}_{-\infty}^{+\infty} \in l^{p,x} (1 < p < +\infty, -1 < x < p-1)$ ряд

$$f(z) = \sigma^{-1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k a_k \frac{\sin \sigma z}{z - \frac{\pi}{\sigma} k}$$

представляет целую функцию $f(z) \in W_{\sigma}^{p,x}$, причем

$$f\left(\frac{\pi}{\sigma} k\right) = a_k \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad \|f\|_{p,x} \leq c \|\{a_k\}\|_{p,x}. \quad (24)$$

Доказательство. Для произвольных значений $-\infty < n < m < +\infty$ обозначим

$$f_{n,m}(z) = \sum_{k=n+1}^m (-1)^k a_k \frac{\sin \sigma z}{z - \frac{\pi}{\sigma} k} \equiv \sin \sigma z \varphi_{n,m}(z).$$

Заметив, что $f_{n,m}(z) \in W_{\sigma}^{p,x}$, согласно теореме А имеем, в силу (11)

$$\begin{aligned} \|f_{n,m}\|_{p,x} &\leq c_1 \|f_{n,m}(x+i)\|_{p,x} \leq c_1 \operatorname{ch} \sigma \|\varphi_{n,m}(x+i)\|_{p,x} \leq \\ &\leq c_2 \sup_{\|G\|_{q,x_1} < B_{p,x}} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n,m}(x+i) G(x) dx \right|, \quad \text{где } G(z) \in H_{-}^{q,x_1}. \end{aligned} \quad (25)$$

Но легко видеть, что

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n,m}(x+i) G(x) dx &= \sum_{k=n+1}^m (-1)^k a_k \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(x)}{x + i - \frac{\pi}{\sigma} k} dx = \\ &= -2\pi i \sum_{k=n+1}^m (-1)^k a_k G\left(\frac{\pi}{\sigma} k - i\right), \end{aligned} \quad (26)$$

поскольку $G(z)$ как функция класса H_{-}^{q,x_1} в нижней полуплоскости представима интегралом Коши (см. (5), теорему 7.5 и (4), теорему 1).

Пользуясь неравенством Гельдера, из (25) и (26) получим

$$\|f_{n,m}\|_{p,x} \leq c_2 \|\{a_k\}_{n+1}^m\|_{p,x} \left(\sum_{k=n+1}^m \left| G\left(\frac{\pi}{\sigma} k - i\right) \right|^q (1+|k|)^{x_1} \right)^{\frac{1}{q}},$$

откуда в силу оценки (18') леммы 4', записанной для функции $G(z) \in H_{-}^{q,x_1}$, получим

$$\|f_{n,m}\|_{p,x} \leq c_3 \|G\|_{q,x_1} \|\{a_k\}_{n+1}^m\|_{p,x} \leq \|c_3 \{a_k\}_{n+1}^m\|_{p,x}. \quad (27)$$

В силу того, что $\{a_k\}_{-\infty}^{+\infty} \in l^{p,x}$, из оценки (27) в силу лемм 2 и 5 вытекают все утверждения теоремы.

Теорема 2. Если $f(z) \in W_{\sigma}^{p,x}$ ($1 < p < +\infty, -1 < x < p-1$), то имеет место разложение в ряд

$$f(z) = \sigma^{-1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k f\left(\frac{\pi}{\sigma} k\right) \frac{\sin \sigma z}{z - \frac{\pi}{\sigma} k} \quad (28)$$

как в смысле леммы 5, так и в метрике $W_{\sigma}^{p,x}$.

Доказательство. Природа сходимости ряда (28) следует из леммы 4 и теоремы 1, причем если мы обозначим сумму этого ряда через $f_*(z)$, то функция

$$\omega(z) = f(z) - f_*(z) \in W_{\sigma}^{p,x}$$

удовлетворяет условиям $\omega\left(\frac{\pi}{\sigma} k\right) = 0$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Легко видеть, что для целой функции

$$\varphi(z) = \frac{\omega(z)}{\sin \sigma z}$$

в силу неравенства (9) справедлива оценка вида

$$|\varphi(z)| \leq c \|\omega\|_{p,x} (1 + |z|)^{-\frac{x}{p}},$$

но так как $-q^{-1} < -\frac{x}{p} < q^{-1} < 1$, то целая функция $\varphi(z) \equiv a_0 \equiv \text{const.}$

Поскольку $\omega(z) \in W_{\sigma}^{p,x}$, но $\sin \sigma z \notin W_{\sigma}^{p,x}$, то очевидно, что $\omega(z) \equiv \varphi(z) \equiv 0$, и тем самым разложение (28) и теорема полностью доказаны.

На основании теорем 1 и 2, а также леммы 4 вытекает

Теорема 3. Для любой последовательности $\{a_k\}_{k=-\infty}^{+\infty} \in l^{p,x}$ ($1 < p < +\infty, -1 < x < p-1$) ряд (1) равномерно сходится в любом круге $|z| \leq R$, сходится также по норме $W_{\sigma}^{p,x}$ и дает отображение всего пространства $l^{p,x}$ на все пространство функций $f(z) \in W_{\sigma}^{p,x}$, причем

$$\|f\|_{p,x} \asymp \|\{a_k\}\|_{p,x}. \quad (29)$$

Результаты данной заметки были получены нами давно и частично легли в основу результатов одного из авторов, лишь анонсированных в заметке (6). Мы сочли нужным опубликовать их с доказательствами, хотя и в теореме 2 указанной заметки содержится и наша теорема 3 в специальном случае $p = x = 1$.

Ереванский государственный университет

Հայկական ՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս Մ. Մ. ԶԻՐԱՇՅԱՆ, Ս. Գ. ՌԱՅԱՅԵԼՅԱՆ

Կշռային L_p դասի էֆուպոնենցիալ տիպի ամբողջ ֆունկցիաների մասին

Ներկա հոդվածում, նախ, սահմանվում են կոմպլեքս թվերի հաջորդականությունների $\{a_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ և էֆուպոնենցիալ $\leq \sigma$ տիպի $f(z)$ ամբողջ ֆունկցիաների $l^{p,x}$ և $W_{\sigma}^{p,x}$ դասերը

$$l^{p,x} : \| (a_k) \|_{p,x} = \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^p (1+|k|)^x \right)^{1/p} < +\infty$$

$$W_{\sigma}^{p,x} : \| f \|_{p,x} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p |x|^x dx \right)^{1/p} < +\infty$$

p և x պարամետրերի $1 < p < +\infty$ և $-1 < x < +\infty$ արժեքների համար՝
 Մի շարք օժանդակ լեմմաներից հետո ապացուցվում է հետևյալ հիմնա-
 կան պնդումը (թեորեմ 3).

Ցանկացած $(a_k) \in l^{p,x}$ հաջորդականության համար

$$f(z) = \sigma^{-1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k a_k \frac{\sin \pi z}{z - \pi/k}, \quad a_k = f(\pi/\sigma k)$$

շարքը հավասարաչափ զուգամետ է ամեն մի $|z| \leq R$ շրջանում, զուգամետ
 է նաև $W_{\sigma}^{p,x}$ -ի մետրիկայում, և առկա է ամբողջ $l^{p,x}$ տարածության ար-
 տապատկերումը ֆունկցիաների $W_{\sigma}^{p,x}$ ամբողջ տարածության վրա:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Б. Я. Левин, Целые функции, Изд-во МГУ, М., 1971. ² Г. Поля, Г. Сеге, За-
 дачи и теоремы из анализа, т. I, отд. III, Наука, М., 1956. ³ R. P. Boas, Entire func-
 tions, N. Y., 1954. ⁴ В. М. Мартиросян, Изв. АН Армянской ССР, Математика, т.
 13, № 5—6, 490—531 (1978). ⁵ М. М. Джрбашян, Интегральные преобразования и
 представления функций в комплексной области, Наука, М., 1966. ⁶ С. Г. Рафаелян,
 ДАН АрмССР, т. 70, № 4 (1980).