ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXII 1981 5

УДК 539.374

МЕХАНИКА

Р. М. Киракосян

О достаточных условиях наименьшего объема идеально-пластических пластинок

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 28/I 1981)

Для однослойных конструкций известно [1], что если допустимо пренебрежение членами второго и более высоких порядков (членами $\frac{\partial^2 D}{\partial h^2}(\delta h)^2$, $\frac{\partial^3 D}{\partial h^3}(\delta h)^3$ и т. д.), то условие постоянства и положительности производной скорости диссипации D по искомой толщине h обеспечивает относительный минимум объема. Известно также [2], что если учесть влияние членов второго порядка, то условие $\frac{\partial D}{\partial h}=$ $=\text{const}>0$ только для отдельных участков поверхности текучести приводит к конструкции относительного минимального объема.

В настоящей работе получается верхняя граница наименьшего объема для сплошных однослойных идеально-пластических пластин. В качестве приложения рассматривается задача проектирования шарнирно опертой по контуру круглой пластинки.

1. Пусть предельное состояние пластинки возникает, когда изгибающие моменты $M_{\alpha\beta}$ удовлетворяют условию текучести

$$F(M_{\alpha\beta},\ h)=0. \tag{1.1}$$

Здесь h — полутолщина, F — однородная функция второй степени от изгибающих моментов $M_{\alpha\beta}$. Кинематически возможные скорости изменения кривизн пластинки $\varkappa_{\alpha\beta}$ будем называть совместимыми с предельным состоянием, если вектор с компонентами, пропорциональными $\varkappa_{\alpha\beta}$ в пространстве моментов, направлен по внешней нормали к поверхности текучести в данной точке $M_{\alpha\beta}$. В силу выпуклости поверхности текучести (1.1) скорость диссипации D, отнесенной к единице площади срединной плоскости пластинки, однозначным образом определяется скоростями изменения кривизн $\varkappa_{\alpha\beta}$, совместимыми с предельным состоянием $M_{\alpha\beta}$:

$$D(\varkappa_{\alpha\beta},\ h)=M_{\alpha\beta}\varkappa_{\alpha\beta} \tag{1.2}$$

(повторение индексов означает суммирование.)

Для любого статически допустимого состояния $M^s_{\alpha\beta}$, лежащего на выпуклой поверхности (1.1) или находящегося внутри этой поверхности, справедливо основное неравенство

$$M^s_{\alpha\beta}\varkappa_{\alpha\beta}\leqslant D(\varkappa_{\alpha\beta},\ h). \tag{1.3}$$

Знак равенства будет иметь место лишь в случае, когда состояние $M^s_{\alpha\beta}$ является предельным, а скорости $\varkappa_{\alpha\beta}$—совместимыми с этим состоянием.

Пусть пластинка толщиной $2h_c$ под действием изгибающей нагрузки интенсивностью q находится в предельном состоянии $M^c_{\alpha\beta}$ с совместимыми скоростями $\varkappa^c_{\alpha\beta}$. Соответствующие скорости прогиба, характеризующие картину разрушения, обозначим через w^c. Пользуясь уравнением виртуальной работы и понятием функции скорости диссипации (1.2), можно записать

$$\int_A qw^c dA=\int_A M^c_{\alpha\beta}\varkappa^c_{\alpha\beta}dA=\int_A D(\varkappa^c_{\alpha\beta},\ h_c)dA, \tag{1.4}$$

где A—площадь срединной плоскости пластинки.

Для любой другой пластинки толщиной $2h_s$, находящейся на грани разрушения или способной нести нагрузку q, на основе (1.3) и уравнения виртуальной работы справедливо неравенство

$$\int_A qw^c dA=\int_A M^s_{\alpha\beta}\varkappa^c_{\alpha\beta}dA\leqslant\int_A D(\varkappa^c_{\alpha\beta},\ h_s)dA. \tag{1.5}$$

Из сравнения (1.4) и (1.5) получим

$$\int_A D(\varkappa^c_{\alpha\beta},\ h_c)dA\leqslant\int_A D(\varkappa^c_{\alpha\beta},\ h_s)dA. \tag{1.6}$$

Легко показать, что в предельном состоянии изгибаемых однослойных пластинок скорость диссипации энергии, соответствующей единичной площади срединной плоскости, прямо пропорциональна квадрату толщины

$$D(\varkappa_{\alpha\beta},\ h)=h^2D_0(\varkappa_{\alpha\beta}), \tag{1.7}$$

где $\varkappa_{\alpha\beta}$ совместимы с предельным состоянием, D_0—функция от скоростей $\varkappa_{\alpha\beta}$.

Имея в виду это обстоятельство, можно написать

$$D(\varkappa^c_{\alpha\beta},\ h_s)=\frac{h_s^2}{h_c^2}\cdot D(\varkappa^c_{\alpha\beta},\ h_c). \tag{1.8}$$

С учетом (1.8) неравенство (1.6) представим в виде

$$\int_A D(\varkappa^c_{\alpha\beta},\ h_c)\frac{h_c^2}{h_c^2}\,dA\leqslant\int_A D(\varkappa^c_{\alpha\beta},\ h_c)\frac{h_s^2}{h_c^2}\,dA. \tag{1.9}$$

В случае

$$\frac{D(\varkappa^c_{\alpha\beta},\ h_c)}{h_c^2} = \text{const} > 0 \tag{1.10}$$

из (1.9) следует

$$\int_A (h_c^2 - h_s^2)\, dA \leqslant 0. \tag{1.11}$$

Так как условие (1.10) не удовлетворяет уравнениям Эйлера для функционала объема, то этот проект дает верхнюю оценку наименьшего объема пластинки.

Следовательно, если спроектировать однослойную пластинку из идеально-пластического материала таким образом, чтобы в предельном состоянии для совместимых скоростей изменения кривизн во всей срединной плоскости пластинки удовлетворилось условие (1.10), то объем такой равноизгибаемой пластинки будет верхней оценкой наименьшего объема.

Сравнивая (1.7) и (1.10), заключаем, что для такой идеально-пластической однослойной пластинки

$$D_0(\varkappa_{\alpha\beta}) = \text{const} > 0. \tag{1.14}$$

Отметим, что условие (1.14) в случае изотропного материала равносильно постоянству интенсивности скоростей изменения кривизн, а в случае анизотропного материала—постоянству обобщенной интенсивности скоростей изменения кривизн пластинки.

2. Рассмотрим задачу определения толщины шарнирно опертой по контуру круглой пластинки под действием равномерно распределенной нагрузки интенсивностью q. Пусть материал пластинки является идеально-пластическим с цилиндрической ортотропией.

Пользуясь дифференциальным уравнением равновесия, условиями текучести и (1.10), приходим к разрешающей системе

$$\alpha_1 x^2 y'^2 + \alpha_2 x y y' + \alpha_3 y^2 - 1 = 0, \tag{2.1}$$

$$t' = -t\, \frac{\alpha_1(3y' + xy'') + \dfrac{\alpha_2 - \alpha_3}{x}\, y + \dfrac{q\sqrt{\alpha}}{4\sqrt{3}}\, \dfrac{x}{t^2}}{\alpha_2 y + 2\alpha_1 x y'},$$

где приняты обозначения:

$$r = xR,\quad h = tR,\quad \frac{1}{r}\frac{dw}{dr} = \frac{k}{\sqrt{\alpha}}\, y,\quad \alpha = 2\sqrt{3}\sqrt{FG + GH + HF},$$

$$\alpha_1 = \frac{F+H}{\alpha},\quad \alpha_2 = \frac{2(F+2H)}{\alpha},\quad \alpha_3 = \frac{F+G+4H}{\alpha}. \tag{2.2}$$

Здесь R—радиус, h—полутолщина, w—скорость прогиба пластинки, штрихом обозначено дифференцирование по x. Постоянные F, G, H известным образом ([3]) выражаются через пределы текучести материала в главных направлениях σ_{sr}, $\sigma_{s\theta}$, σ_{sz}.

Не нарушая условия виртуальности скоростей, можно положить

$$y \equiv \frac{1}{\sqrt{\alpha_3}} = \text{const}. \tag{2.3}$$

Тогда второе уравнение системы (2.1) примет вид

$$t' + A\frac{t}{x} + B\frac{x}{t} = 0, \tag{2.4}$$

где

$$A = \frac{\alpha_2 - \alpha_3}{\alpha_2}, \qquad B = \frac{q\sqrt{\alpha\alpha_3}}{4\sqrt{3}\,\alpha_2}. \tag{2.5}$$

Общее решение уравнения (2.4) имеет вид

$$t = x \cdot \sqrt{Cx^{-2(1+A)} - \frac{B}{1+A}}, \tag{2.6}$$

где C—постоянная интегрирования.

В случае $\alpha_3 > \alpha_2 = 0$, т. е. когда

$$\sigma_{s\theta} > \sigma_{sr}, \quad \sigma_{sz} = \frac{\sigma_{sr}\sigma_{s\theta}}{\sqrt{3\sigma_{sr}^2 + \sigma_{s\theta}^2}}, \tag{2.7}$$

постоянная A равняется минус бесконечности и независимо от значения C имеем

$$t = \sqrt{-\frac{B}{1+A}} \cdot x = \frac{x}{2}\sqrt{\frac{q\sqrt{\alpha}}{\sqrt{3}\,\sqrt{\alpha_3}}}. \tag{2.8}$$

В этом специальном случае изгибающий момент M_r во всех сечениях равен нулю и нагрузка q воспринимается только изгибающим моментом M_θ.

Определяя постоянную C из условия шарнирного опирания, для полутолщины пластинки в остальных случаях находим

$$t = \sqrt{\frac{B}{1+A}}\sqrt{x^{-2A} - x^2}. \tag{2.9}$$

В зависимости от характера ортотропии толщина в центре пластинки может принимать как нулевые, так и бесконечно большое значения. При

$$\sigma_{sr} > \sqrt{2}\,\sigma_{sz}, \quad \sigma_{sr} > \sigma_{s\theta} \tag{2.10}$$

$A > 0$ и толщина в центре пластинки имеет особенность порядка x^{-A}. В остальных случаях толщина в центре равна нулю.

В случае изотропной пластинки

$$\alpha_1 = \frac{1}{3}, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = 1, \quad \alpha = \frac{3}{\sigma_s^2}, \quad A = 0, \quad B = \frac{q}{4\sigma_s} \tag{2.11}$$

и из (2.9) находим

$$t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{q}{\sigma_s}}\sqrt{1-x^2}, \tag{2.12}$$

где σ_s—предел текучести материала.

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Ռ. Մ. ԿԻՐԱԿՈՍՅԱՆ

Իդեալական պլաստիկական սալերի ամենափոքր ծավալի բավարար պայմանների մասին

Ապացուցվում է, որ եթե միաշերտ իդեալական պլաստիկական սալը նախագծված լինի այնպես, որ տված արտաքին ազդեցությունների դեպքում միջին հարթության միավոր մակերեսին ընկնող էներգիայի դիսիպացիայի արագության և սալի հաստության քառակուսու հարաբերությունը ամենուրեք ստանա դրական հաստատուն արժեք, ապա այդպիսի սալը կունենա ամենափոքր ծավալ։ Ցույց է տրվում, որ այս պայմանը համարժեք է սալի կորությունների փոփոխման արագությունների ինտենսիվության հաստատուն լինելուն։ Որպես կիրառություն, լուծված է օրթոտրոպ նյութից պատրաստած հոդակապորեն հենված կլոր սալի նախագծման խնդիրը հավասարաչափ բաշխված բեռի դեպքում։ Ստացված է փակ լուծում։ Ուսումնասիրված է նյութի անիզոտրոպիայի ազդեցությունը սալի հաստության վարքի վրա։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Р. Шилд.* Сб. Механика, т. 2, № 72 (1962). [2] *Z. Mroz.* Rozpr. Inżyn., 114, 1958. [3] *Р. Хилл*, Математическая теория пластичности, ГИТТЛ, М., 1956.