ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXII 1981 5

УДК 517.988.63

МАТЕМАТИКА

А. А. Фонарев

О неподвижных точках

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 10/IV 1981)

Доказывается аналог принципа Ю. Шаудера для уплотняющих на последовательностях отображений в счетно-нормированных пространствах.

Пусть E—полное счетно-нормированное пространство, т. е. E—линейное топологическое пространство, в котором задана счетная система попарно согласованных норм $\|\cdot\|_i$ и в котором всякая последовательность, фундаментальная по каждой из норм $\|\cdot\|_i$, сходится (см. [1]); E_i—это линейное пространство E, рассматриваемое как нормированное с нормой $\|\cdot\|_i$, а L_i—множество всех ограниченных последовательностей из E_i; $\{x_n\}$—обозначение последовательности, где индекс n изменяется от 1 до ∞.

Предположим, что для каждого i задана мера некомпактности ψ_i типа нормальной меры некомпактности [2], т. е. задана неотрицательная функция ψ_i, определенная на L_i, такая, что: 1) $\psi_i(\{x_n\})=0$ для $\{x_n\}\in L_i$ тогда и только тогда, когда $\{x_n\}\in L_i$ компактна (т. е. из любой подпоследовательности $\{x_n\}$ можно выделить фундаментальную в E_i подпоследовательность); 2) $\psi_i(\{x_n\})=\psi_i(\{x_n\}_{n=2}^{\infty})$ для любой $\{x_n\}\in L_i$; 3) если $\{x_n\}\in L_i$, то для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, зависящее от $\{x_n\}$ и ε, такое, что $|\psi_i(\{y_n\})-\psi_i(\{x_n\})|<\varepsilon$ для любой $\{y_n\}\in L_i$ с $\|y_n-x_n\|_i<\delta$ для $n=1, 2, \ldots$; 4) если $\{x_n\}\in L_i$, то $\psi_i(\{y_n\})\leqslant\psi_i(\{x_n\})$ для любой $\{y_n\}\subset co(\{x_n\})$ (co—выпуклая оболочка); 5) если множество $K\subset E_i$ ограничено, то существует такое $M=M(K)>0$, что $\psi_i(\{x_n\})\leqslant M$ для любой $\{x_n\}\subset K$; 6) $\psi_i(\{x_n\})=\psi_i(\{x_n+y\})$ для любых $\{x_n\}\in L_i$ и $y\in E_i$; 7) $\psi_i(\{\lambda x_n\})\leqslant\lambda\psi_i(\{x_n\})$ для любых $\{x_n\}\in L_i$ и $\lambda\in(0, 1)$.

Как обычно, будем называть множество $K\subset E$ ограниченным, если K ограничено в E_i для каждого i. Соответственно, последовательность $\{x_n\}\subset E$ будем называть ограниченной, если $\{x_n\}\in L_i$ для каждого i, и будем обозначать множество всех ограниченных последовательностей из E через L. Далее, будем называть отображение F из $T\subset E$ в E ограниченным, если из $\{x_n\}\subset T$ и $\{x_n\}\in L$ следует $\{F(x_n)\}\in L$.

Определение 1. Непрерывное ограниченное отображение F из $T \subset E$ в E называется нестрого уплотняющим, если из некомпактности $\{x_n\} \subset T$ и $\{x_n\} \in L$ следует $\psi_i(\{F(x_n)\}) \leq \psi_i(\{x_n\})$ для каждого i.

Определение 2. Непрерывное ограниченное отображение F из $T \subset E$ в E называется q-уплотняющим, если для каждого i существует такое $q_i \in (0, 1)$, зависящее от i, что из некомпактности $\{x_n\} \subset T$ и $\{x_n\} \in L$ следует $\psi_i(\{F(x_n)\}) \leq q_i \psi_i(\{x_n\})$.

Определение 3. Непрерывное ограниченное отображение F из $T \subset E$ в E называется уплотняющим, если оно нестрого уплотняющее и из некомпактности $\{x_n\} \subset T$, $\{x_n\} \in L$ следует, что существует такое i, зависящее от $\{x_n\}$, что $\psi_i(\{F(x_n)\}) < \psi_i(\{x_n\})$.

Лемма 1. *Пусть $T \subset E$—замкнутое выпуклое ограниченное непустое множество. Если отображение F из T в T q-уплотняющее, то оно имеет в T неподвижную точку,*

Доказательство. Возьмем любую точку $y \in T$ и зафиксируем ее.

Рассмотрим последовательность множеств $N_0 = T$, $N_k = \overline{co}(F(N_{k-1}) \cup \cup y)$ для $k = 1, 2, \ldots$ ($\overline{co}$—замыкание выпуклой оболочки в E).

Для любого k: 1) $N_k \subseteq T$; 2) N_k выпукло и замкнуто; 3) $F(N_k) \subseteq N_k$; 4) $y \in N_k$.

Рассмотрим множество $N = \bigcap N_k$ ($k = 0, 1, \ldots$). Множество N непусто, выпукло, замкнуто, компактно и $F(N) \subset N$.

Докажем компактность N. Возьмем любую $\{x_n\} \subset N$ и зафиксируем ее. Зафиксируем i, т. е. E_i. Для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие номер k и $\alpha > 0$, что $q_i^k M_i + \alpha/(1-q_i) < \varepsilon$, где M_i—такое число, что $\psi_i(\{y_m\}) \leq M_i$ для любой $\{y_m\} \subset N_0$, q_i—константа из определения 2. Из $\{x_m\} \subset N$ следует, что существует такая $\{y_m^k\} \subset co(F(N_{k-1}) \cup y)$ (m—номер члена последовательности, k—номер последовательности), что $\psi_i(\{x_m\}) \leq \psi_i(\{y_m^k\}) + \alpha$. Но так как $\psi_i(\{y_m^k\}) \leq \psi_i(\{z_m^k\})$ для некоторой $\{z_m^k\} \subset F(N_{k-1})$, то из $\psi_i(\{z_m^k\}) \leq q_i \psi_i(\{x_m^{k-1}\})$ для $\{x_m^{k-1}\} \subset N_{k-1}$, такой, что $F(x_m^{k-1}) = z_m^k$ ($m = 1, 2, \ldots$), имеем $\psi_i(\{x_m\}) \leq q_i \psi_i(\{x_m^{k-1}\}) + \alpha$. Рассуждая аналогично, для $\{x_m^{k-1}\}$ получим такую $\{x_m^{k-2}\} \subset N_{k-2}$, что $\psi_i(\{x_m^{k-1}\}) \leq q_i \psi_i(\{x_m^{k-2}\}) + \alpha$. Имеем $\psi_i(\{x_m\}) \leq q_i^2 \psi_i(\{x_m^{k-2}\}) + (q_i + 1)\alpha$. Продолжая процесс, получим $\psi_i(\{x_m\}) \leq q_i^k \psi_i(\{x_m^0\}) + (q_i^{k-1} + q_i^{k-2} + \cdots + q_i + 1)\alpha$, где $\{x_m^0\} \subset N_0$. Отсюда следует, что $\psi_i(\{x_m\}) < \varepsilon$. Значит, последовательность $\{x_m\}$ компактна в E_i, а следовательно, и в E.

По принципу Шаудера—Тихонова ([3]) существует такая точка $x \in N$, что $x = F(x)$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть множество $T \subset E$ такое же, как в лемме 1. Если отображение F из T в T нестрого уплотняющее, то существует такая $\{x_n\} \subset T$, что $x_n - F(x_n) \to 0$ в E при $n \to \infty$.*

Доказательство. Возьмем любую точку $y \in T$ и зафиксируем ее.

Рассмотрим последовательность таких отображений F_n из T в T, что $F_n(x)=\lambda_n F(x)+(1-\lambda_n)y$ для $x\in T$, $\lambda_n\in(0, 1)$ для $n=1, 2, \ldots$, $\lambda_n\to 1$ при $n\to\infty$. Для любого фиксированного n отображение F_n является q-уплотняющим. Значит, по лемме 1 существует такой $x_n\in T$, что $x_n=F_n(x_n)$ для $n=1, 2, \ldots$ Далее, $x_n-F(x_n)\to 0$ в E при $n\to\infty$. Лемма 2 доказана.

Теорема 1. *Пусть множество $T\subset E$ такое же, как в лемме 1. Если отображение F из T в T уплотняющее, то оно имеет в T неподвижную точку.*

Доказательство. По лемме 2 существует такая $\{x_n\}\subset T$, что $x_n-F(x_n)\to 0$ в E при $n\to\infty$. Значит, для каждого фиксированного i имеем $\psi_i(\{x_n\})=\psi_i(\{F(x_n)\})$, ибо $x_n-F(x_n)\to 0$ в E_i при $n\to\infty$. Следовательно, $\{x_n\}$ компактна в E. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. При доказательстве леммы 1 свойства 6 и 7 меры некомпактности не используются. Если в лемме 2 и теореме 1 нуль E принадлежит T, то лемму 2 и теорему 1 можно доказать без использования свойства 6 меры некомпактности.

Из теоремы 1 следует ряд известных результатов (например, принцип неподвижной точки ([4]), причем выше использовалось доказательство этого принципа из ([5])).

Доказательство теоремы 1 показывает, что при изучении уплотняющих отображений можно ограничиться изучением q-уплотняющих отображений. Разумеется, в банаховом пространстве можно получить различные усиления теоремы 1, используя теорему 1 или построив соответствующую теорию вращения векторного поля без применения принципа трансфинитной индукции (см. ([2])). Например, справедлива

Теорема 2. *Пусть E—банахово пространство и в E задана на ограниченных последовательностях мера некомпактности ψ со свойствами 1—7. И пусть $T\subset E$—замкнутое выпуклое ограниченное множество, содержащее нуль E в качестве внутренней точки, а Γ—граница T. Если для непрерывного ограниченного отображения A из T в E имеем $\psi(\{A(x_n)\})<\psi(\{x_n\})$ для любой некомпактной $\{x_n\}\subset T$ и $A(x)\neq\lambda x$ для всех $\lambda>1$ и $x\in\Gamma$, то в T существует решение уравнения $x=A(x)$.*

В E справедливо утверждение, являющееся объединением принципа Шаудера—Тихонова и принципа сжимающих отображений в счетно-нормированных пространствах, т. е. утверждение 1, которое формулируется в конце статьи и которому предшествуют определение 4 и связанные с этим определением свойства.

Определение 4. Отображение F из $K\subset E$ в E называется: 1) нерастягивающим, если для каждого i имеем $\|F(x)-F(y)\|_i\leqslant\|x-y\|_i$ для всех $x, y\in K$; 2) сжимающим, если для каждого i существует такое $q_i\in(0, 1)$, зависящее от i, что $\|F(x)-F(y)\|_i\leqslant q_i\|x-y\|_i$ для всех $x, y\in K$; 3) вполне непрерывным, если оно непрерывное и из $\{x_n\}\subset K$, $\{x_n\}\in L$ следует, что $\{F(x_n)\}$ компактная.

Из доказательства принципа сжимающих отображений в метрических пространствах ([1]) и эквивалентности сходимости в E сходимости по каждой из норм $\|\cdot\|_i$ вытекает следующий принцип сжимающих отображений в E: если отображение F из замкнутого множества $T\subset E$ в T сжимающее, то уравнение $F(x)=x$ $(x\in T)$ имеет единственное решение $x_0\in T$ и ИП (итерационный процесс) $x_{n+1}=F(x_n)$ $(n=1, 2, \ldots)$, начатый с любого $x_1\in T$, сходится в E к x_0. Для нерастягивающих отображений этот принцип не справедлив. Однако, используя доказательство теоремы 4.1 из ([6]), можно показать, что справедливо

Предложение 1. Пусть множество $T\subset E$ такое же, как в лемме 1; для каждого i имеем $\psi_i(\{x_n+y_n\})\leqslant\psi_i(\{x_n\})+\psi_i(\{y_n\})$ для всех $\{x_n\}, \{y_n\}\in L_i$; и пусть для некоторого i пространство E_i строго нормированное. Если отображение F из T в T нерастягивающее и уплотняющее, то ИП $x_{n+1}=\theta x_n+(1-\theta)F(x_n)$ $(n=1, 2, \ldots)$, где θ— некоторое фиксированное число из $(0, 1)$, начатый с любого $x_1\in T$, сходится к некоторой неподвижной точке отображения F.

Известно, что в любом нормированном пространстве можно задать меру некомпактности Хаусдорфа (см. ([2])). Если для каждого i мера некомпактности ψ_i является мерой некомпактности Хаусдорфа, определенной на L_i, то из свойств меры некомпактности Хаусдорфа вытекает, что если отображение F из $T\subset E$ в E представимо в виде $F=A+B$, где A—вполне непрерывное отображение из T в E, то: 1) F—нестрого уплотняющее отображение, если B—нерастягивающее отображение из T в E; 2) F—q—уплотняющее отображение, если B—сжимающее отображение из T в E. Следовательно из леммы 1 вытекает

Утверждение 1. Пусть множество $T\subset E$ такое же, как в лемме 1. Если отображение F из T в T представимо в виде $F=A+B$, где A—вполне непрерывное отображение из T в E, а B—сжимающее отображение из T в E, то отображение F имеет в T неподвижную точку.

Московский институт стали и сплавов

Ա. Ա. ՑՈՆԱՐԵՎ

Անշարժ կետերի մասին

Թող E-ն լրիվ հաշվելի նորմավորված տարածություն է $\|\cdot\|_i$—նորմերի հաշվելի սիստեմայով ([1]), E_i-ն գծային E տարածություն է $\|\cdot\|_i$ նորմայով, իսկ L_i-ն բոլոր սահմանափակ հաջորդականությունների բազմությունն է E_i գծային տարածությունից։

Ենթադրենք, որ կամայական i համար L_i վրա տրված է ոչ բացասական ψ_i ֆունկցիա՝ ոչ կոմպակտության չափը, հետևյալ հատկություններով

1) եթե $\{x_n\}\in L_i$, ապա $\psi_i\{x_n\}=0$ այն և միայն այն դեպքում, եթե $\{x_n\}$ կոմպակտ է E_i-ում (հաջորդականության $\{x_n\}$ նշանակման մեջ ենթադրվում է, որ n-ը փոփոխվում է 1-ից մինչև ∞), 2) եթե $\{x_n\}\in L_i$, ապա $\psi_i(\{x_n\})=$ $=\psi_i(\{x_n\}_{n=2}^{\infty})$, 3) եթե $\{x_n\}\in L_i$, ապա կամայական $\varepsilon>0$ համար գոյություն ունի $\delta>0$ կախված ε և $\{x_n\}$-ից, այնպիսին, որ $|\psi_i(\{y_n\})-\psi_i(\{x_n\})|<\varepsilon$ եթե միայն $\{y_n\}\in L_i$ և $\|y_n-x_n\|_i<\delta$ $(n=1, 2, \ldots)$; 4) եթե $\{x_n\}\in L_i$, $\{y_n\}\subset co(\{x_n\})$, ապա $\psi_i(\{y_n\}\leqslant\psi_i(\{x_n\})$ (co—ուռուցիկ թաղանթն է; 5) եթե $K\subset E_i$ բազմությունը սահմանափակ է, $\{x_n\}\subset K$, ապա $\psi_i(\{x_n\})\leqslant M$, որտեղ $M=M(K)>0$; 6) եթե $\{x_n\}\in L_i$, $y\in E_i$, ապա $\psi_i(\{x_n\})=\psi_i(\{x_n+y\})$; 7) եթե $\{x_n\}\in L_i$ իսկ $\lambda\in(0, 1)$, ապա $\psi_i(\{\lambda x_n\})\leqslant\lambda\psi_i(\{x_n\})$:

Թեորեմ. Թող $T\subset E$ փակ սահմանափակ ուռուցիկ ոչ դատարկ բազմություն է: Ենթադրենք, որ տրված է T-ից T անընդհատ սահմանափակ արտապատկերում՝ F, այնպիսին, որ $\{x_n\}\subset T$ ոչ կոմպակտությունից հետևում է;

1) $\psi_i(\{F(x_n)\})\leqslant\psi_i(\{x_n\})$ ամեն մի i համար,

2) Գոյություն ունի այնպիսի i, կախված $\{x_n\}$-ից, որ $\psi_i(F\{(x_n)\})<$ $<\psi_i(\{x_n\})$: Այդ դեպքում F արտապատկերումը ունի անշարժ կետ T-ում:

Այս թեորեմը հանդիսանում է հաշվելի-նորմավորված տարածության հաջորդականությունների վրա խտացվող արտապատկերման սկզբունքի անալոգը: Թեորեմից հետևում են մի շարք հայտնի արդյունքներ, օրինակ՝ անշարժ կետի սկզբունքը, տես ([4]):

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин*, Элементы теории функций и функционального анализа, Наука, М., 1972. [2] *Б. Н. Садовский*, УМН, т. 27, вып. 1 (1972). [3] *Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц*, Линейные операторы (общая теория), ИЛ, М., 1962. [4] *Б. Н. Садовский*, Функциональный анализ и его приложения, т. 1, вып. 2 (1967). [5] *А. А. Фонарев*, Дифференциальные и интегральные уравнения, межвузов. сб., вып. 5, Иркутск, 1978. [6] *М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко* и др., Приближенное решение операторных уравнений, Наука, М., 1969.