УДК 517.51

МАТЕМАТИКА

А. Г. Чернявский

О квазианалитических аналогах некоторых свойств гармонических функций

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 9/III 1981)

Классическая теорема Карлемана—Островского о квазианалитических классах функций состоит в описании всех неотрицательных последовательностей $\{m_n\}_0^\infty$, для которых класс функций $C\{m_n\} = \{f \in C^\infty(a, b), |f^{(n)}(t)| \leq A_f B_f^n m_n, a \leq t \leq b, n = 0, 1, \dots\}$ является квазианалитическим, т. е. не содержит функции $f(t) \not\equiv 0$, у которой $f^{(n)}(x_0) = 0, n = 0, 1, \dots$

Эта теорема получила глубокие обобщения в работах М. М. Джрбашяна ⁽¹⁾, М. М. Джрбашяна и А. Б. Нерсисяна ⁽²⁾ и близких по тематике исследованиях и была обобщена П. Лелоном ⁽³⁾, а затем и другими авторами для функций нескольких переменных. В работе ⁽¹⁾ было введено новое понятие α -квазианалитичности и описаны последовательности $\{m_n\}$, при которых для фиксированного оператора дробного дифференцирования в смысле Вейля $L = D_\infty^{1/\rho}, \rho \geq 1$ из соотношений $|L^n f| \leq A_f m_n, L^n f(0) = 0, f \in C^\infty([0, \infty)), \sup\{|x^\rho f^{(q)}(x)|, 0 \leq x < \infty\} < \infty, \rho, q, n = 0, 1, \dots$ с необходимостью следует $f \equiv 0$.

Операторная трактовка проблемы квазианалитичности, которая содержится в этом результате, может быть использована для различных классов операторов L . Целью настоящей работы является рассмотрение случая $L = \Delta$ в $R^N, N > 1$, в котором получены обобщения некоторых хорошо известных свойств гармонических функций.

Пусть $K(r) = \{x = (x_1, \dots, x_N) \in R^N, \|x\|^2 = x_1^2 + \dots + x_N^2 \leq r^2\}$, $S(r) = \{x \in R^N, \|x\| = r\}$, фиксировано $r_0 > 0$ и $G = K(r_0)$. Для произвольного мультииндекса $p = (p_1, \dots, p_N)$ положим $D_1^p = D_{x_1}^{p_1} \dots D_{x_N}^{p_N}$, $|p| = p_1 + \dots + p_N$. Будем использовать некоторые свойства операторов интегрирования целого и дробного порядка $D_0^{-\alpha}, \alpha > 0$, которые приведены в монографии М. М. Джрбашяна ⁽⁴⁾.

Пусть задано произвольное целое $k \geq 0$ и произвольная N -мерная сферическая функция $Y_{k,N}(\omega), \omega \in S(1)$ порядка k (см. ⁽⁵⁾).

Теорема. Для того, чтобы из соотношений

$$u(x) \in C^\infty(G), |\Delta^n u(x)| \leq A_u \|x\|^{k-1} m_n, x \in G, \\ D_x^p \Delta^n u(0) = 0, |p| \leq k; n = 0, 1, \dots \quad (1)$$

следовало, что

$$v_u(r) = \int_{S(r)} u(x) Y_{k,N}(x/r) dx \equiv 0, 0 < r \leq r_0, \quad (2)$$

необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{m_n\}$ удовлетворяла условию квазианалитичности

$$\int_1^\infty \frac{\ln T(r) dr}{r^{3.2}} = \infty, \quad T(r) = \sup_{n \geq 0} \frac{r^n}{m_n}. \quad (3)$$

В частности, при $k=0$ получается следующее квазианалитическое обобщение теоремы о среднем значении для гармонических функций.

Следствие 1. Для того, чтобы из соотношений $u \in C^2(G)$, $|\Delta^n u| \leq m_n$, $\Delta^n u(0) = 0$ следовало, что

$$\int_{S(r)} u(x) dx \equiv 0, 0 < r \leq r_0, \quad (4)$$

необходимо и достаточно выполнение условия (3).

В случае, когда при $k=0$ $m_n \leq (\text{const})^n (2n)!$, равенство (4) следует из формулы Пицетти ((6), с. 288)

$$v_u(r) = \sigma(r) \Gamma\left(\frac{N}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{2}\right)^{2n} \Delta^n u(0) \left(n! \Gamma\left(n + \frac{N}{2}\right)\right)^{-1},$$

где $\sigma(r)$ — площадь сферы $S(r)$.

Для произвольных $k \geq 0$ сформулированная теорема обобщает хорошо известное (см. (5)) свойство ортогональности сферической функции $Y_{k,N}$ любому однородному гармоническому полиному порядка, большего k . Заметим еще, что условие $D_x^p \Delta^n u(0) = 0$, $|p| \leq k$, $n = 0, 1, \dots$ является окончательным в формулировке теоремы, так как гармоническая функция $u(x) = \|x\|^k Y_{k,N}(x/\|x\|)$ удовлетворяет условиям $D_x^p \Delta^n u(0) = 0$, $|p| \leq k-1$, но для нее не выполнено соотношение ортогональности (2). Отметим

Следствие 2. Пусть $\{m_n\}$ — неубывающая последовательность, удовлетворяющая условию квазианалитичности (3). Тогда из соотношений $|D_x^q \Delta^n u| \leq m_n$, $D_x^p \Delta^n u(0) = 0$, $|q| \leq 1$, $|p| \leq k$, $n \geq 0$ следует тождество (2).

Действительно, в этом случае из неравенств Шаудера (6) получим $|D_x^p \Delta^n u| \leq A'_u m_{n+k+1}$, $|p| < \max\{k, 1\}$, откуда вытекают соотношения вида (1) для последовательности $\{m_{n+k+1}\}$.

Прежде чем доказывать теорему, приведем несколько вспомо-

гательных утверждений. В доказательстве следующей леммы используется метод, развитый Ю. И. Любичем и В. А. Ткаченко ⁽⁷⁾.

Лемма 1. Пусть в линейном нормированном пространстве S задан оператор A и для любого вектора $x \in S$ существует целая функция экспоненциального типа $F_\lambda(x)$, удовлетворяющая оценке

$$|F_\lambda(x)| \leq K(1 + |\lambda|^r) \|x\|, \operatorname{Re} \lambda = 0, \quad (5)$$

где константы K, r не зависят от x . Предположим, что при всех $\lambda \in \mathbb{C}, x \in S$ справедливо представление

$$F_\lambda(Ax) = \lambda^2 F_\lambda(x) + \varphi_\lambda(x), \quad (6)$$

в котором $\varphi_\lambda(x)$ — полином от λ . Тогда, если $\|A^n x\| \leq m_n$ и выполнено условие квазианалитичности (3), то $F_\lambda(x)$ есть полином от λ степени не выше r .

Доказательство. Пусть $w(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа с нулевым индикатором при $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$, у которой при $n = 0, 1, \dots$

$$\max \{ |\lambda^n w(\lambda)|, \operatorname{Re} \lambda \geq 0 \} < \infty. \quad (7)$$

Рассмотрим бесконечно дифференцируемую функцию

$$\chi(t) = \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} F_\lambda(x) w(\lambda) e^{-\lambda t} d\lambda, \quad t \geq 0.$$

Продифференцировав функцию χ $2n$ раз, пользуясь соотношениями (5–7), теоремой Коши и леммой Жордана, получим

$$\chi^{(2n)}(t) = \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} F_\lambda(A^n x) w(\lambda) (-1)^{2n} e^{-\lambda t} d\lambda, \quad t \geq 0; \quad |\chi^{(2n)}(t)| \leq \text{const } m_n.$$

В силу теоремы Винера—Пэли $\chi(t) = 0$ при достаточно больших значениях t и по теореме Карлемана—Островского $\chi(t) \equiv 0, t \geq 0$. Пользуясь теоремой Винера—Пэли и тем, что $w(\lambda)$ имеет вполне регулярный рост, получим (см. (8)), что $F_\lambda(x)$ имеет минимальный экспоненциальный тип при $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$. Аналогично рассуждая для полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$ и применяя принцип Фрагмена—Линделефа, получим утверждение леммы.

Лемма 2. Пусть выполнены условия (1). Тогда $v_n(t) \in C^\infty([0, r_0])$, $v_n^{(n)}(0) = 0, n = 0, 1, \dots$

Доказательство. Для произвольного $r > 0$ положим

$$g_r(x) = \tilde{g}_r(\|x\|) = \|x\|^k (\|x\|^{-N+2-2k} - r^{-N+2-2k}) Y_{k,N}(x/\|x\|).$$

Пользуясь формулой Грина (9) и тем, что $\Delta g_r \equiv 0; g_r(x) = 0$ при $\|x\| = r; v_n^{(n)}(r) = 0 (r^{N-2+k}), r \rightarrow 0, n = 0, 1, \dots$, имеем

$$\int_{K(r)} \Delta u(x) g_r(x) dx = \int_{S(r)} u(x) r^{-(N-1+k)} (N-2+2k) Y_{k,N}(x/\|x\|) dx,$$

$$v_u(r) = \frac{r^{N-1+k}}{N-2+2k} \int_0^r v_{\Delta u}(t) g_r(t) dt, \quad |v_u(r)| \leq$$

$$\leq Cr^{N-2+k} D_0^{-2} [|v_{\Delta u}(t)| t^{-(N-2+k)}](r) \leq C^n r^{N-2+k} \times$$

$$\times D_0^{-2n} [|v_{\Delta^n u}(t)| t^{-(N-2+k)}](r) \leq C_1^{n+1} r^{2n},$$

откуда сразу получается утверждение леммы 2.

Лемма 3. Пусть бесконечно дифференцируемая на отрезке $[0, 1]$ функция $y(t)$, у которой $y^{(n)}(0) = 0$, $n = 0, 1, \dots$, удовлетворяет при $0 < t \leq 1$ дифференциальному уравнению $y^{(m)} + (yb_1)^{(m-1)} + \dots + yb_m = 0$, $b_i \in C^\infty([0, 1])$, $|b_i(t)| \leq C/t^i$, $1 \leq i \leq m$ (m фиксировано). Тогда $y(t) \equiv 0$.

Доказательство. Функция $y(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению $y(x) = -D_0^{-1}[yb_1](x) - \dots - D_0^{-m}[yb_m](x)$. Зафиксируем целое $p > \max\{Cm, m\}$ и введем норму $\|y\|_p = \sup\{|y(t)t^{-p}|, 0 < t \leq 1\}$. Пусть $\|y\|_p > 0$, но тогда оценки $|y(t)| \leq C\|y\|_p (D_0^{-1}[t^{p-1}](t) + \dots + D_0^{-m}[t^{p-m}](t)) \leq C\|y\|_p t^p m p^{-1} < \|y\|_p t^p$, $\|y\|_p < \|y\|_p$ приводят к противоречию. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Достаточность. Пусть выполнены соотношения (1, 3) и N нечетно. Положим

$$y_\lambda(x) = \|x\|^{(2-N)/2} H_{k+(N-2)/2}^{(1)}(i\lambda\|x\|) Y_{k,N}(x/\|x\|), \quad x \neq 0,$$

где $H_\nu^{(1)}(z)$ есть функция Ханкеля ⁽⁹⁾. Функция $y_\lambda(x)$ удовлетворяет (см. ^(5,9)) уравнению $\Delta y_\lambda(x) = \lambda^2 y_\lambda(x)$, $x \neq 0$. Из рекуррентных формул для функций Ханкеля ⁽⁹⁾ и из нечетности N следует представление

$$y_\lambda(x) = \lambda^{\frac{2-N}{2}-k} \sum_{p=0}^{\infty} a_p(\|x\|) i^p e^{-\lambda\|x\|} Y_{k,N}(x/\|x\|), \quad x = \frac{N-3}{2} + k; \quad (8)$$

$$\sup_{r_0 > r > 0} (|r^{N-2+k-p} a_p(r)| + |r^{N-1+k-p} a_p'(r)|) < \infty,$$

$$p = 0, 1, \dots, \infty; \quad a_p(r) \equiv \text{const } r^{\frac{1-N}{2}}.$$

Зафиксируем произвольное $r < r_0$ и положим

$$F_\lambda(u) = \lambda^{\frac{N-2}{2}+k} \int_{K(r)} u(x) y_\lambda(x) e^{\lambda r} dx, \quad r < r_0. \quad (9)$$

Пользуясь формулой Грина и соотношениями (1), имеем

$$F_\lambda(\Delta u) - \lambda^2 F_\lambda(u) = \int_{\dot{S}(r)} \lambda^{k+(N-2)/2} \left[\frac{\partial u}{\partial n} y_\lambda - u \frac{\partial}{\partial n} y_\lambda \right] e^{\lambda r} dx \equiv \varphi_\lambda(u).$$

Из представления (8) вытекает, что функция $\varphi_\lambda(u)$ есть полином от λ степени не выше k . В нормированном пространстве

$$S = \{u \in C^\infty(G); D^p \Delta^n u(0) = 0, |p| \leq k, n = 0, 1, \dots, \|u\| = \max |u(x)/x^{k-1}| < \infty\}$$

рассмотрим оператор $A = \Delta$ и семейство функционалов F_λ , заданных формулой (9). Применяя лемму 1, получим, что

$$\sum_{p=0}^{\infty} \lambda^p \int_0^r v_u(t) a_p(t) e^{\lambda(r-t)} dt = \sum_{p=0}^{\infty} b_p \lambda^p.$$

Интегрируя по частям и пользуясь тем, что по лемме 2 $v_u^{(n)}(0) = 0$, $n = 0, 1, \dots$, получим тогда, что

$$\sum_{p=0}^{\infty} \lambda^p \left[-\frac{1}{\lambda} (v_u(r) a_p(r)) - \dots - \frac{1}{\lambda^{p+2}} (v_u(r) a_p(r))^{(p+1)} + \int_0^r \frac{1}{\lambda^{p+2}} (v_u(t) a_p(t))^{(p+2)} e^{\lambda(r-t)} dt \right] = \sum_{p=0}^{\infty} b_p \lambda^p.$$

Сравнивая коэффициенты при степенях λ , получим

$$\sum_{p=0}^{\infty} (v_u(r) a_p(r))^{(p)} = 0, \quad 0 < r < r_0. \quad (10)$$

Положим $y(t) = v_u(t) a_x(t)$, $b_i(t) = a_{x-i}(t)/a_x(t)$, $1 \leq i \leq x$. Из соотношений (8) $|b_i(t)| \leq \text{const}/t^i$, $1 \leq i \leq x$ и в силу (10) $y^{(x)} + (y b_1)^{(x-1)} + \dots + y b_x = 0$. Отсюда по лемме 3 $y \equiv 0$, следовательно $v_u(r) \equiv 0$ для нечетных N .

Пусть теперь N четно и $\bar{x} = (x, x_{N+1})$, $x \in R_N$. Введем функцию $\bar{u}(x) = u(x)$. Очевидно, существует сферическая функция $Y_{k,N+1}$, для которой

$$Y_{k,N+1}(\bar{x}/\|\bar{x}\|) = \|\bar{x}\|^k \|\bar{x}\|^{-k} Y_{k,N}(x/\|x\|).$$

Применяя к функциям $\bar{u}$, $Y_{k,N+1}$ утверждение теоремы, уже доказанное для пространств с нечетной размерностью, после элементарного преобразования имеем

$$0 \equiv \int_{-r}^r v_u(\sqrt{r^2 - t^2}) (r^2 - t^2)^{k/2} dt = D_0^{-1/2} [v_u(\sqrt{t}) t^{k/2}] (r^2).$$

Из свойств оператора дробного интегрирования $D_0^{-1/2}$ следует (см. (4)), что $v_u(t) \equiv 0$.

Необходимость. Пусть не выполнено условие квазианалитичности (3) и $L = D_r^2 + (N-1)r^{-1}D_r - k(k+N-2)/r^2$. Из теоремы Карлемана—Островского следует существование функции $f(t) \in C^\infty([0, r_0])$, $f(t) \geq 0$; $f(t) = 0$ при $0 \leq t \leq r_0/2$; $f(t) \neq 0$ при $t > r_0/2$, у которой $|L^n f(t)| \leq m_n$, $n = 0, 1, \dots$. Поэтому функция $u(x) = f(\|x\|) Y_{k,N}(x/\|x\|)$, $x \neq 0$; $u(0) = 0$ удовлетворяет соотношениям $|\Delta^n u(x)| = |(L^n f(\|x\|)) Y_{k,N}(x/\|x\|)| \leq \text{const} \|x\|^{k-1} m_n$; $u(x) = 0$ при $\|x\| \leq r_0/2$; $n = 0, 1, \dots$; $v_u(r) \neq 0$. Теорема доказана.

Харьковский государственный университет им. А. М. Горького

Հարմոնիկ ֆունկցիաների որոշ հատկությունների անալոզների մասին

Քվադրանալիտիկության պրոբլեմի օպերատորային մեկնաբանությունը, որը տրված է Մ. Մ. Ջրբաշյանի հայտնի աշխատանքում⁽¹⁾, օգտագործվում է տվյալ աշխատանքում ուսումնասիրելու համար Լապլասի օպերատորի նկատմամբ քվադրանալիտիկ ֆունկցիաների դասերը: Յուրյ է տրված, որ հետևյալ առնչություններից՝

$$|\Delta^n u(x)| \leq \|x\|^{k-1} m_n, \quad D_x^p \Delta^n u(0) = 0, \quad |p| \leq k, \quad n = 0, 1, \dots$$

հետևում է՝ $u(x/\|x\|)$ ֆունկցիայի օրթոգոնալությունը k կարգի կամայական սֆերիկ ֆունկցիայի հետ այն և միայն այն դեպքում, երբ $\{m_n\}$ հաջորդականությունը բավարարում է քվադրանալիտիկության բնական պայմաններին՝

$$\int_1^\infty \frac{\ln T(r) dr}{r^{3/2}} = \infty, \quad T(r) = \sup_n \frac{r^n}{m_n}.$$

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ М. М. Джрбашян, Изв. АН АрмССР, сер. «Математика», т. 3, № 3 (1968).
² М. М. Джрбашян, А. Б. Нерсисян, Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, т. 11, № 5 (1958).
³ P. Lelong, Ann. Inst. Fourier, t. 12, 627—641 (1962).
⁴ М. М. Джрбашян, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, Наука, М., 1966.
⁵ Е. Гобсон, Теория сферических и эллипсоидальных функций, ИЛ, М., 1952.
⁶ P. Курант, Уравнения с частными производными, Мир, М., 1964.
⁷ Ю. И. Любич, В. А. Ткаченко, ДАН СССР, т. 190, № 4 (1970).
⁸ Б. Я. Левин, Распределение корней целых функций, ГИТТЛ, М., 1956.
⁹ Г. Ватсон, Теория бесселевых функций, ИЛ, М., 1949.