ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXII 1981 5

УДК 51.01.:518.5

МАТЕМАТИКА

О. С. Асатрян

О булевых подалгебрах m-степеней квазимаксимальных множеств

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 27/II 1981)

В верхней полурешетке m-степеней выявляются конечные подрешетки, которые являются булевыми подалгебрами. Доказано, что булева алгебра подмножеств квазимаксимального множества β, факторизованная по конечной симметрической разности, изоморфна начальному сегменту m-степеней β. Из этого, в частности, следует, что все конечные булевы алгебры встречаются в полурешетке m-степеней.

Описаны все множества, лежащие в m-степени квазимаксимального множества.

Все хорошо известные из ([1]) понятия, используемые в изложении, вводятся без определений. Определения 1 и 2 принадлежат Лахлану ([2]).

Янг (см. ([1]), с. 307) показал, что максимальное множество m— минимально.

Теорема 1. *Если α и β—максимальные множества, то $\alpha\cap\beta$—наименьшая верхняя грань α и β по m-сводимости.*

Доказательство. Если α и β лежат в одном и том же элементе E/F, где E/F фактор множества всех подмножеств натурального ряда относительно конечно-симметрической разности, то нечего доказывать. Предположим, что α и β лежат в различных элементах E/F. Тогда $\beta\setminus\alpha$ и $\alpha\setminus\beta$ бесконечные множества. Поэтому $N\setminus(\alpha\cup\beta)$ конечное множество, так как в противном случае, с одной стороны, $N\setminus(\alpha\cup\beta)$ бесконечно, с другой стороны, $\beta\setminus\alpha$ бесконечно и α содержится в р.п. множестве $\alpha\cup\beta$, что противоречит нашему предположению о максимальности α.

Общерекурсивную функцию, m-сводящую α к $\alpha\cap\beta$, построим согласно следующей инструкции.

Пусть $b\in\beta$ и $c\in\alpha\cap\beta$. Начнем перечислять α и β и параллельно построим о. р. ф.

$$\varphi(x)=\begin{cases} b & \text{если } x\in N\setminus(\alpha\cup\beta)\\ c & \text{если } x \text{ вычисляется в } \alpha \text{ раньше чем в } \beta\\ x & \text{если } x \text{ вычисляется в } \beta \text{ раньше чем в } \alpha. \end{cases}$$

То, что $\varphi(x)$ общерекурсивная функция, следует из конечности $N \setminus (\alpha \bigcup \beta)$. Рассуждая стандартно, легко убедиться, что φ m-сводит α к $\alpha \bigcap \beta$.

Пользуясь точно такой же инструкцией, можно построить о. р. ф. $\psi(x)$, m-сводящую β к $\alpha \bigcap \beta$. Из этих двух утверждений следует, что $\alpha \bigcap \beta$ является верхней гранью максимальных множеств α и β по m-сводимости. Покажем теперь, что $\alpha \bigcap \beta$ наименьшая верхняя грань. Для этого убедимся в том, что всякое m-сводящее к $\alpha \bigcap \beta$ р. п. множество γ либо рекурсивно, либо лежит в одной из степеней $\alpha, \beta, \alpha \bigcap \beta$.

Пусть $\gamma \leqslant_m \alpha \bigcap \beta$ и f m-сводящая о. р. ф.

Рассмотрим следующие случаи:

1а) $f(\gamma)$ конечное множество;

1б) $f(\gamma)$—бесконечное множество и $f(\bar{\gamma})$ конечное множество;

2а) $f(\gamma)$, $f(\bar{\gamma})$ и $f(\bar{\gamma}) \bigcap \alpha$ бесконечны и $f(\bar{\gamma}) \bigcap \beta$ конечно;

2б) $f(\gamma)$, $f(\bar{\gamma})$ и $f(\bar{\gamma}) \bigcap \beta$ бесконечны и $f(\bar{\gamma}) \bigcap \alpha$ конечно;

2в) $f(\gamma)$, $f(\bar{\gamma})$ и $f(\bar{\gamma}) \bigcap \alpha$ бесконечны и $f(\bar{\gamma}) \bigcap \beta$ бесконечно.

Из доказательства теоремы будет видно, что других возможностей нет. Легко убедиться, что в случаях 1а) и 1б) γ рекурсивное множество. Теперь рассмотрим по отдельности остальные 3 случая.

2а) Предположим, что $(\alpha \setminus \beta) \setminus f(\gamma)$ бесконечно, тогда $\beta \bigcup f(N)$ р. п. подмножество β, имеющее бесконечное дополнение, и так как $f(\bar{\gamma}) \bigcap (\alpha \setminus \beta)$ бесконечно, то β не максимально. Это противоречит нашему предположению о максимальности β. Поэтому $(\alpha \setminus \beta) \setminus f(\bar{\gamma})$ конечное множество. Покажем теперь, что в случае 2а) $\beta \leqslant_m \gamma$. Для этого предположим, что $a \in \gamma$ и $b \in \bar{\gamma}$ выбранные числа, и построим о. р. ф. h для m-сведения β к γ по следующей инструкции:

Перечислим α, β, γ и параллельно строим

$$h(x) = \begin{cases} a & \text{если } (x \in f(\bar{\gamma}) \bigcap \beta) \vee (x \text{ вычисляется в } \beta \text{ раньше чем в } f(N)) \\ b & \text{если } x \in (\alpha \setminus \beta) \setminus f(N) \text{ или } x \in N \setminus (\alpha \bigcup \beta) \\ f^{-1}(x) & \text{если } x \text{ вычислится в } f(N) \text{ раньше чем в } \beta \text{ и } x \in \\ & \in \bar{\alpha} \bigcap f(N). \end{cases}$$

(Здесь $f^{-1}(x) = \mu y(f(y) = x)$. Это обозначение будем использовать и дальше).

В том, что условия для построения о. р. ф. функции $h(x)$ непротиворечивы и полны, можно убедиться, рассуждая стандартно, после чего m-сводимость β к γ функцией h очевидна. Сводимость γ к β следует из конечности $f(\bar{\gamma}) \bigcap \beta$. Таким образом мы доказали, что γ лежит в m-степени β.

2б) (Этот случай подобен случаю 2а.) Надо только поменять местами α и β во всех рассуждениях и в схеме для $h(x)$. Тогда мы получим $h'(x)$, m-сводящую α к γ.

В этом случае мы получаем принадлежность γ m-степени α.

2в) В этом случае, как и при 2а), 2б), мы убеждаемся, что $(\beta\setminus\alpha)\setminus f(\bar\gamma)$ и $(\alpha\setminus\beta)\setminus f(\bar\gamma)$ обе конечны. Тогда можем построить о. р. ф. $g(x)$, m-сводящую $\alpha\cap\beta$ к γ:

$$g(x)=\begin{cases} b & \text{если } x\in[N\setminus(\alpha\cap\beta)]\setminus f(N) \\ a & \text{если } x \text{ появится в } \alpha\cap\beta \text{ раньше чем в } f(N) \\ f^{-1}(x) & \text{если } x \text{ появится в } f(N) \text{ раньше чем в } \alpha\cap\beta. \end{cases}$$

Как и при 2а), 2б), убедимся, что $\alpha\cap\beta$ m-сводится к γ функцией g. А сводимость γ к $\alpha\cap\beta$ мы уже предположили. Таким образом в случае 2в) γ лежит в m-степени $\alpha\cap\beta$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Множество m-степеней всех надмножеств квазимаксимального множества β образует конечную булеву подалгебру $\mathfrak{M}_\beta$ в верхней полурешетке m-степеней р. п. множеств.*

Доказательство. Сформулируем лемму и опишем метод доказательства следствия.

Лемма 1. *Максимальное разбиение дополнения квазимаксимального множества р. п. множествами единственно с точностью до конечных множеств.*

Следует применить метод индукции по максимальному разбиению дополнения для доказательства того, что $\mathfrak{M}_\beta$ конечная решетка. Потом надо убедиться в том, что если $\beta=\bigcap\limits_{i\leq n}\alpha_i$, $\delta=\bigcap\limits_{i\in D}\alpha_i$ (где n число максимального разбиения $\bar\beta$, $D\subseteq\{0, 1, \ldots, n\}\rightleftharpoons U$), то $\gamma=\bigcap\limits_{i\in U\setminus D}\alpha_i$ является дополнением δ в $\mathfrak{M}_\beta$.

Далее нас будет интересовать следующий вопрос. Можно ли описать другие множества, лежащие в минимальных m-степенях и степенях квазимаксимальных множеств.

Определение 1. Р. п. множество α максимально в множестве β (или β-максимально) если $|\beta\setminus\alpha|=\infty$,

$$\forall\gamma[\gamma\subset\beta\Rightarrow[\,|\gamma\cap(\beta\setminus\alpha)|<\infty \vee |\bar\gamma\cap(\beta\setminus\alpha)|<\infty]].$$

Лемма 2. *Для произвольного бесконечного р. п. множества β существует β-максимальное множество.*

Доказательство. Пусть δ максимальное множество и $f(N)=\beta$ есть 1—1 о. р. перечисление р. п. β. Тогда очевидно, что $f(\delta)$ β-максимальное множество.

Теорема 2. *Если β γ-максимально и γ рекурсивное множество, то β лежит в минимальной m-степени.*

Доказательство. Пусть γ рекурсивное множество и β γ-максимально. Предположим, что α р. п. множество и $\alpha\leqslant_m\beta$. Покажем, что либо α рекурсивно, либо $\beta\leqslant_m\alpha$. Действительно, если $(\gamma\setminus\beta)\cap f(N)$ конечно, то $\bar\alpha$ перечислимое множество, так как γ рекурсивное множество. Тогда α рекурсивное множество. Если же $(\gamma\setminus\beta)\cap f(N)$ бесконечное множество, то $\gamma\cap f(N)$ р. п., содержится в γ и поэтому в силу γ-максимальности β $(\gamma\cap f(N))\cup\beta$ почти совпадает с γ. В этом случае сводящую функцию построим следующим образом. Пусть a и b числа соответственно из α и $\overline{\alpha}$. Перечислим β и строим функцию $g(x)$:

$$g(x)=\begin{cases} a & \text{если } x \text{ появится в } \beta \text{ раньше, чем в } f(N) \\ b & \text{если } x\in\overline{\gamma}\cup[\gamma\setminus(\beta\cup f(N))] \\ f^{-1}(x) & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что $g(x)$ m-сводит β к α, т. е. β лежит в минимальной m-степени. Что и требовалось доказать.

Следствие 2. *В условиях теоремы 2 β лежит в соответствующей m-степени некоторого максимального множества.*

Доказательство. Пусть β γ-максимально и f 1—1 о. р. перечисление γ. Тогда $\alpha=f^{-1}(\beta)$ максимальное множество.

Остается показать, что α и β лежат в одной и той же m-степени. Действительно, α m-сводится к β функцией f. Функцию, m-сводящую β к α, строим по схеме, описанной в доказательстве теоремы.

Следующая теорема дает полное описание всех множеств, лежащих в m-степени квазимаксимального множества.

Определение. Р. п. множество β γ-квазимаксимально, если β есть пересечение конечного числа γ-максимальных множеств.

Теорема 3. *Для любых рекурсивного γ и рекурсивно перечислимого β β γ-квазимаксимально тогда и только тогда, когда β лежит в m-степени квазимаксимального множества.*

Доказательство. Если β γ-квазимаксимально, то, используя идеи из теоремы 1 и 2, доказываем, что α лежит в m-степени соответствующего квазимаксимального множества. Обратное утверждение здесь мы докажем только для частного случая, из которого уже будет видно, как надо обобщать доказательство для общего случая, т. е. для произвольного квазимаксимального множества.

Пусть β максимальное множество, $\alpha\leqslant_m^f\beta$ и $\beta\leqslant_m^h\alpha$, где f и h соответствующие сводящие функции.

Покажем, что α максимально в $\gamma=\alpha\cup h(N)$ и γ рекурсивное множество.

Предположим, что α не максимально в γ. Тогда $\gamma\setminus\alpha\leftrightharpoons\delta$ не сжато и пусть W_{x_0} такое р. п. множество, что $|W_{x_0}\cap\delta|=\infty$ и $|\delta\setminus W_{x_0}|=\infty$. Легко убедиться в справедливости следующего утверждения:

$$\forall y[y\in h(\overline{\beta})\Rightarrow|\{x/h(x)=y\}|<\infty],$$

которое следует из иммунности $\overline{\beta}$. В таких условиях $h^{-1}(W_{x_0})$ опровергает сжатость $\overline{\beta}$. Получили противоречие. Значит, α γ-максимальное множество.

Теперь предположим, что $f(\overline{\gamma})$ бесконечное множество, и придем к противоречию—из этого будет следовать, что $\overline{\gamma}$ рекурсивное множество.

Рассмотрим два бесконечных р. п. множества $f(\delta)$ и $f(N)$. Они бесконечны в силу нерекурсивности α. $f(\delta)$ и $f(N)$ удовлетворяют следующим трем условиям:

1) $|f(N)\cap\overline{\beta}|=\infty$;

2) $|f(\delta)\cap\overline{\beta}|=\infty$, в противном случае δ не сжато;

3) $|(f(N)\setminus f(\delta))\cap\overline{\beta}|=\infty$, так как $f(N)\setminus f(\delta)=f(\overline{\gamma})$.

Из этих условий видно, что $\overline{\beta}$ не сжато.

Пришли к противоречию. $f(\overline{\gamma})$ конечное, поэтому $\overline{\gamma}$ рекурсивное множество, что и требовалось доказать.

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР
и Ереванского государственного университета

Հ. Ս. ԱՍԱՏՐՅԱՆ

Նախամաքսիմալ բազմության m-աստիճանների բուլյան ենթահանրահաշիվների մասին

*Հայտնի է, որ բնական շարքի բոլոր ենթաբազմությունների անլուծելիության m-աստիճանների **վերին կիսացանցը**՝ L, կիսացանց չէ։ Այս հոդվածում բացահայտված են L-ի վերջավոր ենթացանցեր, որոնք բուլյան հանրահաշիվներ են։ Որպես հետևանք ստացվում է, որ բոլոր վերջավոր բուլյան հանրահաշիվներն ունեն իզոմորֆ ներկայացուցիչներ L-ում։ Այս փաստը ապացուցելու համար օգտվում ենք նախամաքսիմալ (կվազիմաքսիմալ) α բազմության բոլոր թվարկելի ընդլայնումների բազմության՝ $\hat{\alpha}$-ի կառուցվածքից։ Ըստ Լախլանի թեորեմի (տե՛ս ([1]), էջ 109) հիպերհիպերպարզ բազմության համար $\hat{\alpha}$-ն բուլյան հանրահաշիվ է։ Նախամաքսիմալ α բազմությունը նույնպես հիպերհիպերպարզ է, ուրեմն $\hat{\alpha}$-ն բուլյան հանրահաշիվ է։ Ֆակտորիզացնելով $\hat{\alpha}$-ն՝ ըստ վերջավոր սիմետրիկ տարբերության, ստանում ենք վերջավոր բուլյան հանրահաշիվ և ապացուցում, որ այդ հանրահաշիվը իզոմորֆ է α-ին m-բերվող բոլոր m-աստիճանների կիսացանցին։ Հարկավոր է նշել, որ ապացույցը չի օգտագործում Լախլանի թեորեմը։ Ստացված է նաև այն բոլոր բազմությունների լրիվ նկարագրությունը, որոնք ընկած են որևէ նախամաքսիմալ բազմության m-աստիճանում։*

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Х. Роджерс*, Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, Мир, М., 1972. [2] *Дж. Шенфилд*, Степени неразрешимости, Наука, М., 1977.