ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXII 1981 5

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

В. М. Манукян

Особенность Карлемана для одного класса функций

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 12/I 1981)

Пусть $\{\varphi_n(x)\}$—полная, ортонормальная система (ПОНС) в $L^2[0,1]$ и $f(x)\in L^2[0,1]$. Тогда коэффициенты Фурье функции $f(x)$ по системе $\{\varphi_n(x)\}$ удовлетворяют условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2<\infty.$$

Карлеман впервые установил ([1]) существование непрерывной функции, коэффициенты Фурье которой по тригонометрической системе удовлетворяют условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^p=\infty \quad \text{при всех } p<2. \tag{1}$$

В связи с этим возникло следующее определение ([2,3]): функция $f(x)$ обладает особенностью Карлемана относительно системы $\{\varphi_n(x)\}$, если коэффициенты Фурье $c_n=(f,\varphi_n)$ удовлетворяют условию (1). А. М. Олевский в работе ([4]) установил, что для любой ортонормированной полной системы $\{\varphi_n(x)\}$ существует непрерывная функция, обладающая особенностью Карлемана относительно этой системы. Им же в работе ([5]) построена ПОНС, относительно которой каждая непрерывная функция (кроме тождественного нуля) обладает особенностью Карлемана.

В настоящей работе для произвольной точки $x_0\in[0,1]$ построена полная ортонормальная система функций в $L^2[0,1]$, для которой каждая функция $f(x)\in L^2[0,1]$, ($f\not\equiv 0$) непрерывная в точке x_0, обладает особенностью Карлемана, причем все функции системы непрерывны во всех точках отрезка $[0,1]$ за исключением точки x_0. Заметим попутно, что ни одна из функций этой системы не могла быть непрерывной в точке x_0, так как такая функция не обладала бы особенностью Карлемана, являясь в то же время непрерывной в точке x_0.

При построении этой системы используются идеи А. М. Олевского, разработанные в работе ([5]).

Теорема 1. *Для произвольной точки $x_0 \in [0, 1]$ существует ПОНС функций $\{\varphi_n(x)\}$, определенных на $[0, 1]$ и непрерывных в любой точке этого отрезка кроме точки x_0, такая, что любая функция $f(x) \in L^2[0, 1]$ ($f \overline{\infty} 0$), непрерывная в точке x_0, обладает особенностью Карлемана относительно этой системы.*

Лемма 1. (Основная лемма). *Пусть даны: произвольная точка $x_0 \in [0,1]$, ПОНС функций $\{\varphi_n(x)\}$, определенных на $[0,1]$, и пусть функции $\varphi_n(x)$ можно представить в виде $\varphi_n(x) = f_n(x) + \nu_n(x)$ $n = 1, 2, \ldots$, где $f_n(x)$ и $\nu_n(x)$ удовлетворяют следующим условиям:*

I) *$f_n(x)$ непрерывны на $[0, 1]$ $n = 1, 2, \ldots$;*

II) *$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|^q$ равномерно сходится при любом $q > 2$ и любом $0 < \alpha < 1$ на отрезке $[0, \alpha)$, если $x_0 \neq 1$, на отрезке $(\alpha, 1]$, если $x_0 = 1$;*

$$\text{III)} \quad \nu_n(x) = \begin{cases} \nu_n \sin \dfrac{2^n \pi}{x - x_0}, & \text{если} \quad x \neq x_0 \\ 0, & \text{если} \quad x = x_0, \ \nu_n > 0 \quad n = 1, 2, \ldots; \end{cases}$$

$$\text{IV)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n^2 < \infty,$$

тогда любая функция $f(x) \in L^2[0,1]$ ($f \overline{\infty} 0$), непрерывная в точке x_0, обладает особенностью Карлемана относительно системы $\{\varphi_n(x)\}$.

Доказательство. Возьмем произвольную функцию $f(x) \in L^2[0, 1]$ ($f \overline{\infty} 0$), которая не обладает особенностью Карлемана относительно системы $\{\varphi_n(x)\}$, и покажем, что $f(x)$ разрывна в точке x_0. Так как $f(x)$ не обладает особенностью Карлемана, то существует $p < 2$ такое, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|^p < \infty$, где $c_n = (f, \varphi_n)$. Пользуясь неравенством Гёльдера, из условий I и II получим, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x)$ сходится к некоторой непрерывной на $[0, 1)$ (в случае $x_0 = 1$ на $(0, 1]$) функции $\Phi(x)$, поскольку сходимость осуществляется равномерно внутри $[0, 1)$ (в случае $x_0 = 1$ внутри $(0, 1]$), т. е. на любом интервале $[0, \alpha)$ (в случае $x_0 = 1$ на интервале $(\alpha, 1]$), где $0 < \alpha < 1$. Учитывая также равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \nu_n(x)$ на $[0, 1]$, убедимся, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ равномерно сходится внутри $[0, 1)$ (в случае $x_0 = 1$ внутри $(0, 1]$). Обозначим сумму этого ряда через $g(x)$. Ясно, что $g \overline{\infty} f$ и $g(x) = \Phi(x) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \nu_n(x)$ на $[0, 1)$ (в случае $x_0 = 1$ на $(0, 1]$). Так как $\Phi(x)$ непрерывна в точке x_0, то если функция $\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \nu_n(x)$ имеет существенный разрыв в этой точке, то и $f(x)$ имеет разрыв в точке x_0. Из того, что $f \not\equiv 0$, следует существование такого n_0, что

$$c_{n_0} \neq 0,\ c_n = 0 \text{ при } n < n_0. \tag{2}$$

Рассмотрим случай, когда $x_0 \neq 1$. Возьмем последовательность $x_k = x_0 + \frac{2^{n_0+1}}{4k+1}$ и выберем k_0 так, чтобы при $k > k_0$ $x_k \in [0, 1]$. Для произвольных $n > n_0$ и $k > k_0$ имеем:

$$c_n \nu_n(x_k) = c_n \nu_n \cdot \sin 2^{n-n_0-1}(4k+1)\pi = 0;$$

$$c_{n_0} \nu_{n_0}(x_k) = c_{n_0} \nu_{n_0} \cdot \sin(2k+1/2)\pi = c_{n_0} \nu_{n_0} \neq 0. \tag{3}$$

Тогда, учитывая равномерную сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \nu_n(x)$ и условия (2), (3), получим

$$\lim_{k\to\infty} \psi(x_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{k\to\infty} c_n \nu_n(x_k) = c_{n_0} \nu_{n_0} \neq 0. \tag{4}$$

Возьмем теперь последовательность $x_k' = x_0 + \frac{1}{k}$ и выберем k' так, что при $k > k_0'$ $x_k' \in [0, 1]$. Для таких k и произвольного n имеем

$$c_n \nu_n(x_k') = c_n \nu_n \sin 2^n k\pi = 0,$$

из чего следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \psi(x_k') = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{k\to\infty} c_n \nu_n(x_k') = 0. \tag{5}$$

Но так как $x_k \to x_0$, $x_k' \to x_0$, то условия (4) и (5) показывают, что функция $\psi(x)$ имеет в точке x_0 разрыв II порядка.

Если же $x_0 = 1$, то возьмем $x_k = 1 - \frac{2^{n_0+1}}{4k+1}$ и $x_k' = 1 - \frac{1}{k}$. Тем самым лемма доказана.

Для доказательства теоремы осталось построить полную ортонормальную систему, которая удовлетворяет условиям основной леммы.

Лемма 2. *Если в $L^2[0, 1]$ даны:*

1°) *ортонормальная система ограниченных функций $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n$;*

2°) *функции $\|\gamma_i(x)\|_{L^2} \leq 1$ $i = 1, 2, \ldots$, то для произвольных $\varepsilon > 0$ и функции $\tau(x) \in L^2[0, 1]$ существуют натуральное число m, функции $\{\varphi_{n+j}(x)\}_{j=1}^m$, многочлен $P(x)$, составленный из функций $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{n+m}$, такие, что:*

1) $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{n+m}$ *ОНС в $L^2[0, 1]$;*

II) $\varphi_{n+j}(x)=f_j(x)+\nu_j\gamma_j(x)$ $j=1, 2, \ldots, m$, *где* $f_j(x)$ *непрерывны на* $[0, 1]$, *а* $\nu_j>0$;

III) $\sum_{j=1}^{m}|f_j(x)|^q<\varepsilon$ *на* $\left[0, \frac{n}{n+1}\right]$ *при любом* $q>2+\frac{1}{n}$;

IV) $\sum_{j=1}^{m}\nu_j^2<\varepsilon$;

V) $\|P(x)-\tau(x)\|_{L^2}<\varepsilon$.

Приведем схему доказательства этой леммы. Дополним систему $\{\varphi_i(x)\}_1^n$ непрерывными функциями ([6]) до ортонормального базиса в $L^2[0, 1]$. Разложим $\tau(x)$ по этому базису и возьмем достаточно много членов этого разложения так, чтобы полученный многочлен $Q(x)$ был достаточно близок к $\tau(x)$. Присоединив к системе $\{\varphi_i(x)\}_1^n$ те элементы базиса, которые также участвуют в многочлене $Q(x)$, получим ОНС $\varphi_1(x), \ldots \varphi_n(x), p_1(x), \ldots p_l(x)$. Рассмотрим эти функции как векторы пространства $L^2\left[\frac{n}{n+1}, 1\right]$. Подпространство, натянутое на эти векторы, обозначим через L, а его ортогональное дополнение — через H. В H выберем некоторую ортонормальную систему функций и, взяв достаточно много членов этой системы, доопределим эти функции нулем на $\left[0, \frac{n}{n+1}\right]$. Вновь полученные функции вместе с предыдущими составляют ОНС $\varphi_1(x), \ldots \varphi_n(x), p_1(x), \ldots \ldots p_m(x)$ в $L^2[0, 1]$, причем все функции $p_j(x)$ $(1\leqslant j\leqslant m)$ непрерывны на $\left[0, \frac{n}{n+1}\right]$. К системе функций $\{p_j(x)\}_1^m$ применим ортонормированную матрицу Уолша $A_l(m=2^l)$. Получим ОНС $\varphi_1(x), \ldots \ldots \varphi_n(x), g_1(x), \ldots g_m(x)$, причем на отрезке $\left[0, \frac{n}{n+1}\right]$ опять все функции $g_i(x)$ $(1\leqslant i\leqslant m)$ непрерывны, а $\sum_{i=1}^{m}\left|g_i(x)\right|^q<\frac{\varepsilon}{16}$ при любом $2+\frac{1}{n}<q<3$. Теперь опишем, как строится функция $\varphi_{n+1}(x)$ в предположении, что $m=1$. (При $m>1$ описываемый ниже процесс повторяется соответствующее число раз.) Функцию $\varphi_{n+1}(x)$ ищем в форме $\varphi_{n+1}(x)=\beta_1\psi_1(x)$, где β_1 нормирующий множитель, достаточно близкий к единице, а $\psi_1(x)=\sum_{i=1}^{n}a_i\bar{\varphi}_i(x)+\bar{g}_1(x)+\alpha_1\gamma_1(x)$, где α_1 достаточно мало, $\bar{\varphi}_i(x)$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ и $\bar{g}(x)$ непрерывные функции, достаточно близкие соответственно к $\varphi_i(x)$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ и $g_1(x)$, причем на отрезке $\left[0, \frac{n}{n+1}\right]$ $\bar{g}_1(x)=g_1(x)$. Коэффициенты a_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ выбраны так, что функция $\psi_1(x)$ ортогональна всем $\varphi_i(x)$ $(1\leqslant i\leqslant n)$, и числа a_i

достаточно малы, что возможно получить, решая систему линейных уравнений $\sum_{i=1}^{n} a_i (\bar{\varphi}_i, \varphi_j) = -(\bar{g}_1 + \alpha_1 \gamma_1, \varphi_j)$ $j = 1, 2, \dots n$ и вспомнив, что детерминант является непрерывной функцией своих элементов. Таким образом можно получить ОНС $\{\varphi_i(x)\}_1^{n+m}$. Обозначим $f_k(x) = \beta_k \bar{g}_k(x) + \beta_k \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i^{(k)} \bar{\varphi}_i(x)$ и $\nu_k = \alpha_k \beta_k$ $(1 \leqslant k \leqslant m)$, тогда $\varphi_{n+k}(x) = f_k(x) + \nu_k \gamma_k(x)$, причем функции $f_k(x)$ $(1 \leqslant k \leqslant m)$ непрерывны на отрезке $[0, 1]$, а $\nu_k (1 \leqslant k \leqslant m)$ достаточно малы, так что I, II и IV условия леммы выполняются для системы $\{\varphi_i(x)\}_1^{n+m}$. Так как $f_k(x)$ достаточно близки к $\bar{g}_k(x)$, а $\bar{g}_k(x) = g_k(x)$ на $\left[0, \frac{n}{n+1}\right]$, то отсюда следует выполнение условия III. Заметим, что линейное пространство, натянутое на $\{g_i(x)\}_1^m$, содержит в себе линейное подпространство, натянутое на $\{p_i(x)\}_1^l$. Из этого следует, что $Q(x)$ можно представить как линейную комбинацию функций $\varphi_1(x), \dots \varphi_n(x)$, $g_1(x), \dots g_m(x)$. Обозначим через $P(x)$ многочлен, составленный из функций $\varphi_i(x)$ $(1 \leqslant i \leqslant n + m)$ с коэффициентами этой линейной комбинации. Из того, что функции $\varphi_{n+i}(x)$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ выбраны достаточно близко к $g_i(x)$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$, следует выполнение V условия леммы. Система, удовлетворяющая условиям леммы 2, построена.

Построение системы $\{\varphi_n(x)\}$, удовлетворяющей условиям основной леммы, уже очевидно. Возьмем счетное, всюду плотное в $L^2[0, 1]$ множество функций $\tau_k(x)$, последовательность положительных чисел ε_k таких, что $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < \infty$, функции $\gamma_i(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{2^i \pi}{x - x_0} & \text{если } x \neq x_0 \\ 0 & \text{если } x = x_0 \end{cases}$.
Построение системы $\{\varphi_n(x)\}$ осуществим последовательно, пачками. Возьмем $\varphi_1(x) = \dfrac{\gamma_1(x)}{\|\gamma_1(x)\|}$. Предположив, что после k-того шага выбраны первые n_k функций $\varphi_n(x)$ $(1 \leqslant n \leqslant n_k)$, опишем $k+1$-ый шаг. К имеющейся уже ортонормальной системе ограниченных функций $\{\varphi_i(x)\}_1^{n_k}$, к функциям $\{\gamma^{n_k+i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ применим предыдущую лемму, взяв $\varepsilon = \varepsilon_k$ и $\tau(x) = \tau_k(x)$. Легко проверить, что для построенной таким образом системы выполняются все условия основной леммы. Заметим только, что полнота системы $\{\varphi_n(x)\}$ обеспечивается V условием леммы 2 и тем, что множество функций $\tau_k(x)$ всюду плотно в $L^2[0, 1]$.

Замечание 1. Воспользовавшись замечанием А. М. Олевского (5), можно, слегка изменив предыдущую конструкцию, получить аналогичный результат и для особенностей типа Вейля. Именно,

Теорема 2. *Для любой последовательности $w(n) \to \infty$ и точки $x_0 \in [0, 1]$ существует полная ортонормальная система функций $\{\varphi_n(x)\}$, определенных на $[0, 1]$ и непрерывных в любой точке этого отрезка кроме точки x_0, такая, что коэффициенты Фурье произ-*

вольной функции $f(x) \in L^2[0, 1]$ $(f \overline{\infty} 0)$, *непрерывной в точке* x_0, *удовлетворяют условию*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_2^n w(n) = \infty.$$

В заключение автор выражает благодарность Ф. Г. Арутюняну за постановку задачи и ценные советы.

Ереванский государственный университет

Վ. Մ. ՄԱՆՈՒԿՅԱՆ

Կարլեմանի եզակիությունը մի դասի ֆունկցիաների համար

Եթե $\{\varphi_n(x)\}$*-ը օրթոնորմավորված լրիվ սիստեմ է* $L^2[0,1]$*-ում, ապա, ինչպես հայտնի է, կամայական* $f(x) \in L^2[0, 1]$ *ֆունկցիայի Ֆուրյեի գործակիցների համար* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty$*։ Բայց եթե* $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^p = \infty$*, բոլոր* $p < 2$ *համար, ապա ասում են, որ* $f(x)$ *ֆունկցիան ունի Կարլեմանի եզակիություն* $\{\varphi_n(x)\}$ *օրթոնորմավորված լրիվ սիստեմում։*

Տվյալ աշխատանքում կամայական $x_0 \in [0, 1]$ *կետի համար կառուցված է* $L^2[0, 1]$*-ում օրթոնորմավորված ֆունկցիաների լրիվ սիստեմ, ըստ որի կամայական* $f(x) \in L^2[0, 1]$ *ֆունկցիա* $(f \infty 0)$*, որն անընդհատ է* x_0 *կետում, ունի Կարլեմանի եզակիություն՝ ըստ այդ սիստեմի։*

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. К. Бари*, Тригонометрические ряды, Физматгиз, М., 1961. [2] *С. Качмаж, Г. Штейгауз*, Теория ортогональных рядов, Физматгиз, М., 1958. [3] *П. Л. Ульянов*, Успехи матем. науки, т. 19, вып. 1 (1964). [4] *А. М. Олевский*, Сиб. матем. журн., т. 4, № 3 (1963). [5] *А. М. Олевский*, Сиб. матем. журн., т. 8, № 4 (1967). [6] *H. S. Shapiro*, Michigan Math. J., vol. 11, № 1 (1964).