ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXII 1981 5

УДК 517.518.8

МАТЕМАТИКА

А. А. Вагаршакян

О приближении многочленами с несимметрической весовой функцией

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 3/I 1981)

Обозначим через $C_p(-\infty,+\infty)$ пространство непрерывных функций, удовлетворяющих условию

$$\lim_{x\to\infty} f(x)e^{-p(x)}=0,$$

где $p(x)>0$—неубывающая функция. Норма элемента f вводится следующим образом:

$$\| f \| = \sup_{-\infty<x<\infty} |f(x)|e^{-p(x)}.$$

В дальнейшем мы будем рассматривать только те пространства $C_p(-\infty,+\infty)$, к которым принадлежат все многочлены.

Настоящая заметка посвящена следующей задаче: при каких условиях на весовую функцию $p(x)$ многочлены всюду плотны в пространстве $C_p(-\infty,+\infty)$? Приведенная задача для широкого класса четных весовых функций была исследована С. Н. Бернштейном [1,2]. После работ С. Н. Бернштейна этой задачей интересовались многие математики, с результатами работ которых можно познакомиться в обзорных статьях М. М. Джрбашяна [3], С. Н. Мергеляна [4] и Н. И. Ахиезера [5].

Мы рассматриваем случай, когда $p(x)$ не является четной функцией. Отдельные конкретные случаи нечетной весовой функции были рассмотрены в работе И. О. Хачатряна [6].

Теорема. *Пусть весовая функция $p(x)$ имеет вид*

$$p(x)=\begin{cases} a|x|, & \text{при} \quad x<0 \\ q(x), & \text{при} \quad x>0, \end{cases}$$

где $a>0$—некоторое число, а $q(x)>0$—логарифмически выпуклая функция.

Тогда многочлены всюду плотны в пространстве непрерывных функций $C_p(-\infty, +\infty)$ тогда и только тогда, когда расходится интеграл

$$\int_1^\infty \frac{q(x)}{x^{3/2}}\,dx=\infty. \tag{1}$$

Доказательство. Необходимость очевидна, так как в случае, когда интеграл (1) сходится, многочлены не плотны даже на полуоси $(0, +\infty)$ с весом $e^{-q(x)}$ ([3]). Докажем достаточность. Предположим обратное: имеет место (1), однако многочлены не плотны в $C_p(-\infty, +\infty)$. Тогда существует мера $d\mu\neq 0$ такая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{p(x)}|d\mu(x)|<\infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^k d\mu(x)=0, \quad k=0,\ 1,\ \ldots$$

Рассмотрим функцию

$$g(w)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixw}d\mu(x).$$

Обозначим

$$g_1(w)=\int_{-\infty}^{0} e^{ixw}d\mu(x), \qquad g_2(w)=\int_{0}^{\infty} e^{ixw}d\mu(x).$$

Легко заметить, что $g_1(w)$—аналитическая функция в полуплоскости $\{w;\ \operatorname{Im} w<a\}$, а $g_2(w)$—в полуплоскости $\{w;\ \operatorname{Im} w>0\}$. Следовательно, $g(w)$—аналитическая функция в полосе $\{w;\ 0<\operatorname{Im} w<a\}$. Заметим, что

$$g^{(k)}(0)=i^k\int_{-\infty}^{\infty} x^k d\mu(x)=0, \quad k=0,\ 1,\ \ldots$$

Из условия (1) следует, что существует выпуклая, неубывающая последовательность $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что

$$\max_{|w-i\rho|<\rho} |g^{(n)}(w)|\leqslant M_n, \quad n=0,\ 1,\ \ldots,$$

где $0<\rho<\min\{a, 1\}$ и расходится ряд (см. ([9]))

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{M_n}{M_{n+1}}}=\infty. \tag{2}$$

Рассмотрим функцию $f(z)=g(i\rho-i\rho e^{-z})$, определенную при $\operatorname{Re} z>0$. Заметим, что $f^{(n)}(0)=0$, $n=0,\ 1,\ \ldots$ Очевидно, что для любого n имеет место следующая формула:

$$f^{(n)}(z)=\sum_{k=1}^{n} A_{k,n}e^{-kz}g^{(k)}(i\rho-i\rho e^{-z}).$$

Мы утверждаем, что $|A_{k,n}|\leqslant C_n^k$. Действительно, пусть предполагаемое неравенство имеет место для некоторого n и всех k, $0<k\leqslant n$. Докажем его справедливость при $n+1$ и $0<k\leqslant n+1$. Поскольку

$$f^{(n+1)}(z)=-\sum_{k=1}^{n} A_{k,n}(ke^{-kz}g^{(k)}(i\rho-i\rho e^{-z})+i\rho e^{-(k+1)z}g^{(k+1)}(i\rho-i\rho e^{-z})=$$

$$=-\sum_{k=1}^{n}(kA_{k,n}+i\rho A_{k-1,n})e^{-kz}g^{(k)}(i\rho-i\rho e^{-z})-i\rho A_{n,n}e^{-(n+1)z}g^{(n+1)}(i\rho-i\rho e^{-z}),$$

то

$$|A_{k,n+1}|=|kA_{k,n}+i\rho A_{k-1,n}|\leqslant kC_n^k+C_n^{k-1}\leqslant C_{n+1}^k.$$

Из полученного неравенства следует, что

$$|f^{(n)}(z)|\leqslant\sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{-k\operatorname{Re}z}\,|g^{(k)}(i\rho-i\rho e^{-z})|\leqslant 2^n M_n$$

и, следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2^n M_n}{2^{n+1}M_{n+1}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{M_n}{M_{n+1}}}=+\infty.$$

В силу теоремы Б. Салинаса (см. [7,8]) $f(z)\equiv 0$. Поэтому $d\mu\equiv 0$. Теорема доказана.

Автор благодарен академику АН Армянской ССР М. М. Джрбашяну за обсуждение работы и ценные советы.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Ա. Ա. ՎԱՂԱՐՇԱԿՅԱՆ

Ոչ սիմետրիկ կշռային ֆունկցիայով բազմանդամներով մոտարկելու մասին

Ներկա հոդվածում դիտարկվում է ամբողջ առանցքի վրա բազմանդամներով կշռային մոտարկման խնդիրը: Դիտարկվում են այնպիսի ֆունկցիաներ, որոնք ունեն հետևյալ տեսքը՝

$$p(x)=\begin{cases} a|x|, & \text{երբ}\quad x<0\\ q(x), & \text{երբ}\quad x>0,\end{cases}$$

որտեղ $a>0$, *իսկ* $q(x)>0$ *լոգարիթմական ուռուցիկ ֆունկցիա է: Բերվում են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ* $q(x)$*-ի վրա, որոնց դեպքում բազմանդամները լրիվ են անընդհատ ֆունկցիաների տարածության մեջ* $\exp\{-p(x)\}$ *կշռի առկայությամբ:*

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *S. Bernstein*, Bull. Math. de France, vol. 52 (1924). [2] *С. Н. Бернштейн*, ДАН СССР, т. 88, № 4 (1953). [3] *М. М. Джрбашян*, Мат. сб., т. 36 (78), № 3 (1955). [4] *С. Н. Мергелян*, УМН, т. 11, вып. 5. (71) (1956). [5] *Н. И. Ахиезер*, УМН, т. 11, № 4 (70) (1956). [6] *И. О. Хачатрян*, Изв. АН АрмССР, т. 3, № 4—5 (1968). [7] *М. М. Джрбашян, Г. С. Казарян*, Изв. АН СССР, т. 37, № 1 (1973). [8] *R. B. Salinas*, Rev. Acad. Ciencias, Madrid, vol. 49 (1955). [9] *С. Мандельбройт*, Примыкающие ряды, ИЛ, М., 1955.