ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXII 1981 4

УДК 517.926.4

МАТЕМАТИКА

Т. М. Кошелева

Задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений в классе обобщенных функций

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 10/XII 1980)

Пусть S—класс бесконечно дифференцируемых и быстро убывающих функций одного переменного, а S'—класс непрерывных функционалов на S. Рассмотрим следующее уравнение:

$$\frac{d^m U}{dt^m}+P_1(x)\frac{d^{m-1}U}{dt^{m-1}}+\ldots+P_m(x)U=0, \quad t>0, \tag{1}$$

где $P_1(x), \ldots, P_m(x)$—заданные полиномы действительного переменного x, а $U(t)$, при фиксированном $t>0$, функционал из S'.

Будем говорить, что функционал $U(t)$ принадлежит классу M_l, если для него существуют постоянная C, натуральные числа k и n, такие, что имеют место оценки

$$\left|\frac{d^l U(t, \varphi)}{dt^l}\right|\leqslant C(1+t^k)\sup_{-\infty<x<\infty}|(1+|x|^n)(|\varphi(x)|+|\varphi'(x)|+\cdots+|\varphi^{(j)}(x)|]| \tag{2}$$

при $\varphi\in S$, $t\geqslant 0$, $l=0, \ldots, q-1$, где $U(t, \varphi)$—значение функционала $U(t)$ на функции $\varphi(x)$. Обозначим объединение классов M_l через $M(M=S')$.

Уравнение относительно λ

$$\lambda^m+P_1(x)\lambda^{m-1}+\cdots+P_m(x)=0 \tag{3}$$

называется характеристическим уравнением уравнения (1).

Пусть $\lambda_1(x), \ldots, \lambda_m(x)$—корни характеристического уравнения (3). Предполагается, что всюду

$$\operatorname{Re}\lambda_k(x)\leqslant 0, \quad k=1, 2, \ldots, q, \tag{4}$$

$$\operatorname{Re}\lambda_k(x)\geqslant 0, \quad k=q+1, \ldots, m, \tag{5}$$

причем $\operatorname{Re}\lambda_k(x)=0$ при $k\geqslant q+1$ в конечном числе точек, где q—постоянное целое число, не зависящее от x.

Задача Коши для уравнения (1) исследуется в следующей постановке: найти решение уравнения (1), принадлежащее классу M_j и удовлетворяющее граничным условиям

$$U(0)=l_0,\ U'(0)=l_1,\ \ldots,\ U^{(q-1)}(0)=l_{q-1}, \tag{6}$$

где $l_0, \ldots, l_{q-1}$—заданные функционалы из класса M_j, не зависящие от t.

В случае, когда в (5) имеет место строгое неравенство, эта задача в классе M исследована в работе [1], а в классах H_α^β в работе [2]. При нарушении в (5) строгого неравенства в конечном числе точек исследование этой задачи в классах M, M_j и H_α^β существенно усложняется, и, как указывается ниже, однородная задача в классе M имеет бесконечное число линейно-независимых решений. В данной работе доказывается, что однородная задача в классе M_j имеет конечное число линейно-независимых решений, а неоднородная задача всегда разрешима. Отметим, что формулы решения, полученные в работах [1] и [2], в данном случае не всегда имеют смысл и вид решения полученной нами формулы существенно отличается от формул, полученных в [1] и [2].

2. Решение однородной задачи (1), (6) в классе M_j. Обозначим через $x_1, \ldots, x_n$ те точки, в которых хотя бы для одного из корней $\lambda_k(x)$ с индексом $k\geqslant q+1$ $\operatorname{Re}\lambda_k(x)=0$. Обозначим через r_p число тех корней $\lambda_{q+1}(x), \ldots, \lambda_m(x)$, для которых реальные части в точке x_p равны нулю $(1\leqslant p\leqslant n)$.

В работе [1] доказано, что решение однородной задачи (1), (6) имеет вид

$$U(t, \varphi)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{r=0}^{j} c_{ir}(t)\varphi^{(r)}(x_i), \quad \varphi\in S, \tag{7}$$

где $c_{ir}(t)$ вместе со своими производными до $m-1$ порядка при $t\to\infty$ растут не быстрее полинома.

Подставляя $U(t, \varphi)$ из (7) в уравнение (1) и однородные граничные условия (6) $(l_j=0,\ j=0, \ldots, q-1)$ и приравнивая к нулю коэффиценты $\varphi^{(r)}(x_i)$, для определения $c_{ir}(t)$ при любом фиксированном $i(i=1, \ldots, n)$ получим следующую задачу:

$$c_{ij}^{(m)}(t)+P_1(x_i)c_{ij}^{(m-1)}(t)+\cdots+c_{ij}(t)P_m(x_i)=0, \quad t>0; \tag{8}$$

$$c_{ir}^{(m)}(t)+P_1(x_i)c_{ir}^{(m-1)}(t)+\cdots+P_m(x_i)c_{ir}(t)+\sum_{k=r+1}^{j}\sum_{l=0}^{m-1}\alpha_{irkl}c_{ik}^{(l)}(t)=0,$$

$$t>0; \quad (r=0, 1, \ldots, j-1) \tag{9}$$

$$c_{ir}^{(k)}(0)=0 \quad (r=0, \ldots, j;\ \ k=0, \ldots, q-1), \tag{10}$$

где α_{irkl}—некоторые вполне определенные постоянные.

Корнями характеристического уравнения, соответствующего системам (8)—(9), будут $\lambda_1(x_i), \ldots, \lambda_m(x_i)$. В работе [3] (см. стр. 234) показано, что задача (8)—(10) имеет относительно $c_{i0}(t)$, $c_{i1}(t), \ldots,$

$c_{ij}(t)$, в классе функций, стремящихся к бесконечности вместе со своими производными не быстрее полинома, ровно $r_i(j+1)$ линейно-независимых решений. Подставляя эти решения в формулу (7), получим следующую теорему.

Теорема 1. *Однородная задача* (1), (6) *в классе* M_j *имеет* $(j+1)(r_1+\cdots+r_n)$ *линейно-независимых решений, а в классе* M *имеет бесконечное число линейно-независимых решений.*

3. Решение неоднородной задачи (1), (6) в классе M_j. Для решения неоднородной задачи (1), (6) доказаны следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть* $f(x)=(f_1(x), \ldots, f_m(x))$ — *действительная непрерывная вектор-функция в интервале* (α, β) *и в каждой точке* $x\in(\alpha, \beta)$ *вектор* $f(x)$ *имеет ровно* r *положительных компонент, где* r *не зависит от точки интервала. Пусть далее в некоторой фиксированной точке* $x_0\in(\alpha, \beta)$ *первые* r *компоненты вектора* $f(x_0)$ *положительны. Тогда* $f_1(x)>0, \ldots, f_r(x)>0$, $f_{r+1}(x)\leqslant 0, \ldots, f_m(x)\leqslant 0$, $x\in(\alpha, \beta)$.

Утверждение леммы 1 очевидно.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* (4) *и* (5). *Тогда корни* $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_m(x)$, *удовлетворяющие этим условиям, можно выбрать так, чтобы они в некоторой* ε *окрестности точки* $x_i (i=1, \ldots, n)$ *представились в виде*

$$\lambda_j(x)=\begin{cases}\varphi_j((x-x_i)^{1/r_j}) & \text{при } x_i<x<x_i+\varepsilon,\\ \psi_j((x-x_j)^{1/q_j}) & \text{при } x_i-\varepsilon<x<x_i,\end{cases} \tag{11}$$

где $\varphi_j(x)$ *и* $\psi_j(x)$ — *аналитические функции относительно переменной* x *в* ε *окрестности нуля, а* r_j *и* q_j — *некоторые целые положительные числа.*

Напомним, что $x_1, \ldots, x_n$ те точки, где нарушается строгое неравенство в (5), хотя бы для одного корня $\lambda_k(x)$ с индексом $k\geqslant q+1$.

Доказательство леммы 2. В книге ([4]) (стр. 50—55) доказано, что корни $\beta_1(x), \ldots, \beta_m(x)$ уравнения (3) всегда можно выбрать так, чтобы они в окрестности фиксированной точки x_i представились в виде

$$\beta_j(x)=\mu_j((x-x_i)^{1/p_j}), \quad -\varepsilon<x-x_i<\varepsilon, \tag{12}$$

где $\mu_j(x)$ — аналитическая функция относительно переменной x в достаточно малой ε окрестности нуля. Пусть x_0 — фиксированная точка в интервале $(x_i, x_i+\varepsilon)$. Согласно условиям (4) и (5) корни $\beta_j(x)$ можно перенумеровать так, чтобы имело место неравенство

$$\operatorname{Re}\beta_1(x_0)\leqslant 0, \ldots, \operatorname{Re}\beta_q(x_0)\leqslant 0, \operatorname{Re}\beta_{q+1}(x_0)>0, \ldots, \operatorname{Re}\beta_m(x_0)>0.$$

Ясно, что при условии (4) и (5) вектор

$$f(x)=(\operatorname{Re}\beta_{q+1}(x), \ldots, \operatorname{Re}\beta_m(x), \operatorname{Re}\beta_1(x), \ldots, \operatorname{Re}\beta_q(x))$$

в интервале $(x_l, x_l+\varepsilon)$ удовлетворяет всем условиям леммы 1. Поэтому

$$\operatorname{Re}\beta_1(x)\leqslant 0, \ldots, \operatorname{Re}\beta_q(x)\leqslant 0, \quad \operatorname{Re}\beta_{q+1}(x)>0, \ldots, \operatorname{Re}\beta_m(x)>0 \text{ при } x_l<x<x_l+\varepsilon.$$

Следовательно в интервале $(\alpha_l, x_l+\varepsilon)$ в качестве $\lambda_1(x), \ldots, \lambda_m(x)$ можно взять $\beta_1(x), \ldots, \beta_m(x)$. Отсюда следует справедливость представления (11) в этом интервале. Аналогично доказывается представление (11) в интервале $(x_l-\varepsilon, x_l)$. Пусть

$$\lambda^q+a_1(x)\lambda^{q-1}+\cdots+a_q(x)\equiv(\lambda-\lambda_1(x))\ldots(\lambda-\lambda_q(x)). \tag{12}$$

Расссмотрим уравнение

$$y^{(q)}+a_1(x)y^{(q-1)}+\cdots+a_q(x)y=0, \; t>0, \tag{13}$$

где производные берутся по t, а x входит как параметр. Решение ищется в классе обычных функций.

Обозначим через $\omega_0(x, t), \ldots, \omega_{q-1}(x, t)$ фундаментальную систему решений уравнения (13) с граничными условиями

$$\frac{\partial^k\omega_i(x, 0)}{\partial t^k}=\begin{cases}0 \text{ при } i\neq k, \; i, \; k=0, \ldots, m-1,\\ 1 \text{ при } i=k, \; k=0, \ldots, m-1.\end{cases} \tag{14}$$

Так как корни $\lambda_1(x), \ldots, \lambda_q(x)$ при $x\neq x_k (k=1, \ldots, n)$ разделены от корней $\lambda_{q+1}(x), \ldots, \lambda_m(x)$, то коэффициенты $a_1(x), \ldots, a_q(x)$ и функции $\omega_i(x, t)$ аналогичны относительно действительной переменной t и x при $x\neq x_1, \ldots, x_n$, $t\geqslant 0$ (²). Для функций $\omega_i(x, t)$ $(i=0, 1, \ldots, q-1)$ имеет место следующая

Теорема 2. *Функции $\omega_i(x, t) (i=0, \ldots, q-1)$ удовлетворяют оценкам*

$$\left|\frac{\partial^k\omega_i(x, t)}{\partial t^k}\right|\leqslant c_k(1+t^r)(1+|x|^{n_1}), \tag{15}$$

$$\left|\frac{\partial^{l+k}\omega_i(x, t)}{\partial x^l\partial t^k}\right|\leqslant c_{lk}\frac{(1+t^r)(1+|x|^{n_1})}{|x-x_1|^{l-\alpha}\ldots|x-x_n|^{l-\alpha}}, \tag{16}$$

где r, n_1, α, c_k, c_{lk}—некоторые положительные постоянные.

Доказательство. Докажем теорему 2 для функции $\omega_0(x, t)$. Обозначим

$$w_k(x, t)=\left(\frac{\partial}{\partial t}-\lambda_{k+1}(x)E\right)\ldots\left(\frac{\partial}{\partial t}-\lambda_q(x)E\right)\omega_0(x, t), \quad k=1,\ldots, q-1,$$

где E—единичный оператор. Пусть $w_q(x, t)\equiv\omega_0(x, t)$.

Так как $\omega_0(x, t)$ удовлетворяет уравнению (13) и граничному условию (14), то согласно разложению (12) функции $w_1(x, t), \ldots, w_q(x, t)$ являются решением следующей задачи Коши:

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} - \lambda_1(x) w_1 = 0, \quad \frac{\partial w_k}{\partial t} - \lambda_k(x) w_k = w_{k-1}, \quad k=2, 3, \ldots, q, \quad t>0,$$

$$w_k(x, 0) = (-1)^{q-k} \lambda_{k+1}(x) \ldots \lambda_q(x), \quad k=1, \ldots, q-1, \quad w_q(x, 0) = 1.$$

Ясно, что функции $w_1(x, t), \ldots, w_q(x, t)$ можно найти в явном виде. Используя представление (11), можно показать, что они в окрестности точек $x_1, \ldots, x_n$ удовлетворяют оценкам (15) и (16). Оценки (15) и (16) для функции $\omega_j(x, t)$ в окрестности бесконечности доказаны в [3].

Теперь, используя теорему 2, покажем, что задача (1) и (6) в классе M_j всегда разрешима.

Обозначим через S^j класс функций $\varphi(x)$, которые j раз непрерывно дифференцируемы всюду, кроме, быть может, точек $x_1, \ldots, x_n$, и удовлетворяют оценке

$$(1+|x|^r)|\varphi^{(n)}(x)| \leqslant c_{rn}, \; r=0, 1, \ldots, \quad n=0, 1, \ldots, j, \tag{17}$$

где c_{rn}—постоянные.

Так как начальные условия $l_k \in M_j (k=0, \ldots, q-1)$, то их можно непрерывно продолжить в классе функций S^j.

Пусть $\alpha(x) \in C_0^\infty$ и в окрестности $x_1, \ldots, x_n$ равна 1, $\varphi(x) \in S$, а $P(x)$—полином порядка $nj-1$, удовлетворяющий условиям

$$P^{(k)}(x_i) = \varphi^{(k)}(x_i), \quad (k=0, \ldots, j-1; \; i=1, \ldots, n).$$

Полином $P(x)$ определяется единственным образом и имеет вид

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{j-1} \varphi^{(k)}(x_i) P_{ik}(x), \tag{18}$$

где $P_{ik}(x)$—вполне определенные полиномы порядка не выше чем $nj-1$, не зависящие от $\varphi(x)$.

Частное решение задачи (11), (6) будем искать в виде

$$U(t, \varphi) = U_0(t, \varphi) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{j} c_{ik}(t) \varphi^{(k)}(x_i), \tag{19}$$

где

$$U_0(t, \varphi) = \sum_{k=0}^{q-1} l_k(\omega_k(t, x))(\varphi(x) - \alpha(x) P(x)),$$

$\omega_k(t, x) (k=0, \ldots, q-1)$—вышеуказанная фундаментальная система решений уравнения (13), а $c_{ik}(t)$—искомые функции, которые вместе со своими производными до $m-1$ порядка растут не быстрее полинома.

Согласно теореме 2 функционал $U_0(t, \varphi)$ принадлежит классу M_j.

Подставляя $U(t, \varphi)$ из (19) в уравнение (1) и граничное условие (6), для определения функций $c_{ik}(t)$ получим неоднородную задачу (8)—(10), разрешимость которой показана в работе ([3]) (стр. 234).

Таким образом мы получили

Теорему 3. *Неоднородная задача* (1), (6) *в классе* M_j *всегда разрешима.*

В заключение выражаю благодарность Н. Е. Товмасяну, под руководством которого выполнена данная работа.

Курский политехнический
институт

Տ. Մ. ԿՈՇԵԼԵՎԱ

Կոշու խնդիր սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների համար ընդհանրացված ֆունկցիաների դասում

Աշխատանքում դիտարկված է Կոշու խնդիրը m-րդ կարգի սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների համար, ընդհանրացված ֆունկցիաների դասում, որոնք ունեն վերջավոր սինգուլյարություն։ Ապացուցված է, որ դիտարկված խնդիրը միշտ լուծելի է, իսկ համասեռ խնդիրը ունի վերջավոր թվով գծորեն անկախ լուծումներ։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Г. В. Диконолов*, Мат. сб., т. 59 (101) (1962). [2] *А. Л. Павлов*, Мат. сб., т. 103 (145), № 3 (7) (1977). [3] *Г. Е. Шилов*, Математический анализ. Второй спец курс, Наука, М., 1965. [4] *B. L. van der Warden*, Einfuhrung in die algebraische Geometrie, Berlin, 1939.