ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXII 1981 4

УДК 514.763

МАТЕМАТИКА

М. А. Андикян

О три-тканях, симметрично присоединенных к нормализованной поверхности аффинного пространства

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 10/XII 1980)

1. М. А. Акивис [1] построил общую теорию три-тканей, образованных тремя расслоениями коразмерности r, на $2r$-мерном дифференцируемом многообразии M^{2r}. В работе [2] было введено понятие три-ткани на касательном расслоении $T(V^r)$ дифференцируемого многообразия V^r размерности r, одно расслоение которой совпадает с касательным расслоением $T(V^r)$, а два других образованы семействами касательных к многообразию V^r векторных полей.

В настоящей работе вводится понятие три-ткани, симметрично присоединенной к оснащенной поверхности V^r аффинного пространства A^{2r}. Изучаются свойства этой три-ткани.

2. Рассмотрим $2r$-мерное аффинное пространство A^{2r}, отнесенное к подвижному реперу (x, e_I). Тогда дифференциальные уравнения движения этого репера имеют вид:

$$dx=\omega^I e_I,\quad de_I=\omega_I^J e_J,\quad (I, J, \ldots = 1, 2, \ldots, 2r). \tag{1}$$

Компоненты инфинитезимального перемещения репера удовлетворяют уравнениям структуры [3]:

$$d\omega^I=\omega^J\wedge\omega_J^I,\qquad d\omega_J^I=\omega_J^K\wedge\omega_K^I. \tag{2}$$

Пусть V^r подмногообразие пространства A^{2r}, x—ее точка, а T_x касательная плоскость V^r в точке x. Присоединим к многообразию V^r подвижный репер так, чтобы его векторы e_i $(i, j \ldots = 1, 2, \ldots, r)$ составляли базис в T_x. Тогда уравнения, определяющие поверхность V^r, запишутся так:

$$\omega^\alpha=0,\quad (\alpha, \beta, \ldots = r+1, r+2, \ldots, 2r). \tag{3}$$

Дифференцируя внешним образом эти уравнения и применяя лемму Картана [3], получаем

$$\omega_i^\alpha=h_{ij}^\alpha\omega^j, \tag{4}$$

где $h^\alpha_{ij}=h^\alpha_{ji}$. Продолжая эти уравнения, находим, что

$$\nabla h^\alpha_{ij}=h^\alpha_{ijk}\omega^k, \tag{5}$$

где h^α_{ijk} симметричны по всем нижним индексам, а ∇ — дифференциальный оператор, определяемый формулой $\nabla h^\alpha_{ij}=dh^\alpha_{ij}-h^\alpha_{lj}\omega^l_i-h^\alpha_{il}\omega^l_j+h^\beta_{ij}\omega^\alpha_\beta$. Уравнения (5) показывают, что h^α_{ij} образуют пучок тензоров на поверхности V^r.

Рассмотрим касательное расслоение $T(V^r)$ поверхности V^r. Его элементом является пара (x, ξ), где $x\in V^r$, $\xi\in T_x$. Пусть $\bar{D}$ такая область касательного расслоения $T(V^r)$, что естественное отображение $\varphi:\bar{D}\to A^{2r}$, определяемое формулой $y=x+\xi$, где $(x, \xi)\in\bar{D}$, устанавливает биективное соответствие между $\bar{D}$ и некоторой областью D аффинного пространства A^{2r}. Тогда формы ω^i и $\theta^i=d\xi^i+\xi^j\omega^i_j+\omega^i$ будут базисными формами касательного расслоения $T(V^r)$, а его структурные уравнения имеют вид:

$$d\omega^i=\omega^j\wedge\omega^i_j,\quad d\theta^i=\theta^j\wedge\omega^i_j+\omega^j\wedge\theta^i_j, \tag{6}$$

где

$$\theta^i_j=\xi^l h^\alpha_{lj}\omega^i_\alpha. \tag{7}$$

Так как точка $y=x+\xi$ описывает $2r$-мерную область D аффинного пространства A^{2r}, то в этой области выполняется условие $\det\|\xi^l h^\alpha_{lj}\|\neq 0$. Это условие исключает из рассмотрения в каждом T_x алгебраическую коническую поверхность порядка r, которая является фокусной поверхностью плоскости T_x.

3. В области $\bar{D}$ касательного расслоения $T(V^r)$ рассмотрим три-ткань $W(3, r; T(V^r))$, одно расслоение которой совпадает с касательным расслоением $T(V^r)$. Два других расслоения коразмерности r образованы семействами касательных к многообразию V^r векторных полей. Слои F_α расслоения λ_α три-ткани $W(3, r; T(V^r))$ определяются вполне интегрируемыми системами уравнений Пфаффа $\sigma^i_\alpha=0$, $(\alpha=1, 2, 3)$, где

$$\sigma^i_1=\theta^i-\lambda^i_j\omega^j,\quad \sigma^i_2=-\theta^i-\mu^i_j\omega^j,\quad \sigma^i_3=2g^i_j\omega^j, \tag{8}$$

а величины

$$g^i_j=\frac{1}{2}(\lambda^i_j+\mu^i_j) \tag{9}$$

образуют невырожденную матрицу. Векторы e^α_i, касательные к слоям F_α, проходящие через точку $y=x+\xi$, определяются с помощью величин, связанных с поверхностью V^r, причем $e^3_i=-(e^1_i+e^2_i)$. Введем еще следующие векторы, инвариантно связанные с точкой $y=x+\xi$

$$e^*_i = e^1_i - e^2_i = \frac{1}{2} f^l_i(\lambda^j_l - \mu^j_l)e_j + \xi^\alpha f^l_i h^\alpha_{lk} e_\alpha, \tag{10}$$

где f^l_i — матрица, обратная к g^i_l. Обозначим через Δ^α ($\alpha = 1, 2, 3$) r-вектор, касательный к слою F_α слоения λ_α. Тогда r-вектор $\Delta^* = e^*_1 \wedge e^*_2 \wedge \ldots \wedge e^*_r$ будет изоклинным ([4]) по отношению к r-векторам Δ^α, и образует вместе с ними гармоническую четверку. Инвариантное распределение Δ^* будет горизонтальным распределением касательного расслоения $T(V^r)$. При этом Δ^* зависит как от точки $x \in V^r$, так и от вектора ξ, определяющих точку $y = x + \xi$.

Можно провести канонизацию репера так, чтобы $g^i_j = \lambda^i_j = \mu^i_j$. Тогда формы θ^i_j и ∇g^i_j являются главными на касательном расслоении $T(V^r)$ ([2]), и их разложения по базисным формам запишутся в виде:

$$\nabla g^i_j = (U^i_{jk} - \bar{Z}^i_{jk})\omega^k + (V^i_{jl} - Z^i_{jl}) f^l_k \theta^k, \tag{11}$$

$$\theta^i_j = Z^i_{jk}\omega^k + \bar{Z}^i_{jl} f^l_k \theta^k, \tag{12}$$

где

$$U^i_{[jk]} = 0, \qquad V^i_{[jk]} = 0. \tag{13}$$

При этом на касательном расслоении $T(V^r)$ определяется аффинная связность γ с формой связности $\sigma^I_J = \begin{Bmatrix} \sigma^i_j & 0 \\ 0 & \sigma^i_j \end{Bmatrix}$, тензором кручения a^i_{jk} и тензором кривизны b^i_{jkl}, где

$$\sigma^i_j = \omega^i_j + \frac{1}{2} f^l_k f^m_j \left[(V^i_{lm} - Z^i_{lm})(\theta^k_2 - \theta^k_1) + \bar{Z}^i_{lm}(\theta^k_2 + \theta^k_1)\right], \tag{14}$$

$$a^i_{jk} = f^l_j f^m_k Z^i_{[lm]}. \tag{15}$$

4. Пусть теперь поверхность V^r снабжена оснащением $N(V^r)$ ([5]). Оснащение $N(V^r)$ представляет собой расслоенное пространство. Его называют нормальным расслоением, присоединенным к поверхности V^r ([6]). Поместим векторы e_α подвижного репера, присоединенного к поверхности V^r, в нормальной плоскости N_x. Формы ω^i_α становятся главными на поверхности V^r, и их разложение по базисным формам можно записать в виде:

$$\omega^i_\alpha = \lambda^i_{\alpha j}\omega^j. \tag{16}$$

Отсюда и из уравнений (2), (3) и (4) следует, что

$$d\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + R^i_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l, \tag{17}$$

$$d\omega^\alpha_\beta = \omega^\gamma_\beta \wedge \omega^\alpha_\gamma + R^\alpha_{\beta kl}\omega^k \wedge \omega^l, \tag{18}$$

где

$$R^i_{jkl} = h^\alpha_{j[k}\lambda^i_{|\alpha|l]}, \tag{19}$$

$$R^\alpha_{\beta kl} = -h^\alpha_{i[k}\lambda^i_{|\beta|l]}. \tag{20}$$

Из этих уравнений в силу теоремы Картана—Лаптева ([7]) следует, что формы ω^i_j определяют аффинную связность на поверхности V^r, а формы ω^α_β определяют аффинную связность в нормальном расслоении $N(V^r)$ ([5]). Из уравнений (7) и (16) находим, что

$$\theta^i_j = \xi^l h^\alpha_{lj} \lambda^i_{\alpha k} \omega^k. \tag{21}$$

Отсюда и из (6) получаем, что структурные уравнения касательного расслоения запишутся в виде:

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j, \quad d\theta^i = \theta^j \wedge \omega^i_j + \xi^l R^i_{ljk} \omega^j \wedge \omega^k. \tag{22}$$

Уравнения (22) вместе с (17) показывают, что формы $\omega^I_J = \begin{Vmatrix} \omega^i_j, & 0 \\ 0, & \omega^i_j \end{Vmatrix}$ определяют аффинную связность на многообразии $T(V^r)$. Эта связность является горизонтальным поднятием аффинной связности с поверхности V^r в касательное расслоение $T(V^r)$ ([8]).

5. Три-ткань $W(3, r; T(V^r))$ назовем симметрично присоединенной к оснащенной поверхности V^r, если инвариантный r-вектор $\Delta^*(x, \xi)$ этой ткани не зависит от ξ и параллелен нормали N_x поверхности V^r, определяемой в ее точке x.

Если три-ткань $W(3, r; T(V^r))$ симметрично присоединена к оснащенной поверхности V^r, то из уравнений (12) и (16) следует, что $\tilde{Z}^i_{jk} = 0$. Из этих соотношений, а также из (21), (12), (19) и (11) следует, что разложения главных форм ∇g^i_j принимают вид

$$\nabla g^i_j = U^i_{jk} \omega^k + (V^i_{jl} - \xi^m R^i_{mjl}) f^l_k \theta^k. \tag{23}$$

Форма связности и тензор кручения симметрично присоединенной три-ткани имеют вид:

$$\sigma^i_j = \omega^i_j + f^i_l U^l_{jk} \omega^k - 2a^i_{jk} \theta^k, \tag{24}$$

$$a^i_{jk} = f^i_m \xi^l R^m_{ljk}. \tag{25}$$

Теорема 1. *Для того, чтобы к касательному расслоению $T(V^r)$ оснащенной поверхности V^r аффинного пространства A^{2r} можно было симметрично присоединить три-ткань, необходимо и достаточно, чтобы на касательном расслоении $T(V^r)$ существовало тензорное поле g^i_j, ковариантный дифференциал которого имеет вид* (23). *Тогда форма связности три-ткани, а также ее тензор кручения определяются соотношениями* (24) *и* (25).

Пусть теперь на касательном расслоении $T(V^r)$ задано произвольное расслоение λ_1 коразмерности r так, что любой слой этого расслоения пересекает касательную плоскость T_x в одной точке. Тогда с помощью распределений Δ^1, $\Delta^3 = T_x$ и Δ^* строится распределение Δ^2, симметрично с Δ^1 по отношению к распределениям Δ^3 и Δ^*. Возникает вопрос: когда оно вместе с Δ^1 и Δ^3 определяет симметрично присоединенную три-ткань в касательном расслоении $T(V^r)$?

Теорема 2. *Для того, чтобы к касательному расслоению* *оснащенной поверхности V^r аффинного пространства A^{2r} можно было симметрично присоединить три-ткань так, чтобы одно из расслоений γ_α совпадало с данным, необходимо и достаточно, чтобы для этого слоения выполнялось одно из следующих условий: а) $U^l_{[jk]}=0$, б) $V^l_{[jk]}=0$.*

Теорема 3. *К нормализованной поверхности V^r аффинного пространства A^{2r} можно симметрично присоединить шестиугольную три-ткань с произволом $2r$ функций r аргументов.*

6. Так как базисные векторы распределений Δ^3, Δ^* связаны соотношениями $e^3_i=-(e^1_i+e^2_i)$ и $e^*_i=e^1_i-e^2_i$, то векторы e^3_i и e^*_i лежат в одной двумерной плоскости, определяемой бивектором $e^1_i\wedge e^2_i$. Тем самым между подпространствами Δ^3_y и Δ^*_y устанавливается взаимно-однозначное соответствие. Например, для Δ^3_y и Δ^*_y это соответствие устанавливается отображением

$$\varphi:\eta=\eta^i e^3_i\in\Delta^3_y\to\bar{\eta}=\eta^i e^*_i\in\Delta^*. \tag{26}$$

Отображение φ позволяет провести канонизацию векторов $e_\alpha(\alpha=r+1, r+2, \ldots, 2r)$, образующих базис распределения Δ^*_y. А именно: положим $\varphi(e_i)=e_{i+r}$, тогда $e_{i+r}=e^*_i$ и из соотношений (10) следует, что

$$\xi^k f^l_j h^{i+r}_{kl}=\delta^i_j. \tag{27}$$

Так как f^l_j — матрица, обратная к g^l_j, то эти соотношения можно записать в виде

$$\xi^l h^i_{lj}=g^i_j, \tag{28}$$

где здесь и далее $h^i_{lj}=h^{i+r}_{lj}$. После проведенной канонизации величины h^i_{lj} образуют тензор на касательном расслоении $T(V^r)$.

Дифференцируя (28) и используя (5), (11) и (12), получаем, что формы ω^i_j и ω^{i+r}_{j+r} связаны соотношениями

$$\omega^i_j-\omega^{i+r}_{j+r}=(U^i_{lk}-\bar{Z}^i_{lk}-\xi^m h^i_{mlk}+h^i_{lk})f^l_j\omega^k+(V^i_{lm}-Z^i_{lm}-h^i_{ls}g^s_m)f^l_j f^m_k\theta^k. \tag{29}$$

Последние уравнения показывают, что формы ω^{i+r}_{j+r} так же, как и ω^i_j, определяют аффинную связность на $T(V^r)$ [5].

Теорема 4. *Для того, чтобы форма Пфаффа ω^{i+r}_{j+r} определяла аффинную связность на поверхности V^r, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих эквивалентных условий: а) h^i_{jk} — тензор на поверхности V^r, б) a^i_{jk} — тензор на поверхности V^r, в) слои F_3 расслоения γ_3 три-ткани $W(3, r; T(V^r))$ несут групповую структуру (см. [9]).*

7. При отображении φ точке $y\in T_x$ соответствует точка $z\in N_x$, определяемая уравнением $z=x+\xi^i e_{i+r}$. При этом отображении векторные поля, определяющие расслоения три-ткани, переходят в векторные поля на нормальном расслоении, так что на нормальном рас-

слоении естественным образом определяется три-ткань $W(3, r; N(V^r))$ с основными формами (8). При этом инвариантному горизонтальному распределению, образующему гармоническую четверку с распределениями, касательными к слоям три-ткани $W(3, r; T(V^r))$, соответствует некоторое распределение Δ^*_z, где z точка нормали N_x. Это распределение будет изоклинным по отношению к распределениям, касательным к слоям три-ткани $W(3, r; N(V^r))$, и образует вместе с ними гармоническую четверку. При этом Δ^*_z, вообще говоря, не параллельно к распределению Δ^3_y.

8. Рассмотрим теперь изоклинные, симметрично присоединенные к поверхности V^r три-ткани. При $r>2$ характеристические условия изоклинности три-ткани имеют вид $a^i_{[jk]} = a_{[j}\delta^i_{k]}$ (4).

Теорема 5. *Для того, чтобы симметрично присоединенная к нормализованной поверхности аффинного пространства три-ткань была изоклинной, необходимо и достаточно, чтобы ее тензор кривизны имел строение* $R^i_{jkl} = -h^i_{j[k}a_{l]}$.

Назовем оснащение $N(V^r)$ специальным, если тензор λ^i_{jk} имеет строение $\lambda^i_{jk} = -\delta^i_j a_k$. Отсюда и из (28), (17)—(20) следует, что $R^i_{jkl} = -R^{i+r}_{j+rkl}$.

Теорема 6. *Для того, чтобы симметрично присоединенная к нормализованной поверхности три-ткань была изоклинной при $r>3$, необходимо и достаточно, чтобы поверхность обладала специальным оснащением. При $r\leqslant 3$ это условие является только достаточным. В этом случае тензор кривизны нормальной связности совпадает, с точностью до знака, с тензором кривизны* R^i_{jkl}.

Следующая теорема дает геометрическую характеристику специального оснащения.

Теорема 7. *Для того, чтобы поверхность V^r обладала специальным оснащением, необходимо и достаточно, чтобы фокусные поверхности F_x распадались на $(r-1)$-кратную бесконечно удаленную гиперплоскость и собственную гиперплоскость F. При этом существует $(r-1)$-мерное, касательное к поверхности распределение, вдоль интегральных линий которого нормальная плоскость N_x остается параллельной, в то время как вдоль любой кривой, не являющейся интегральной для этого распределения, нормальные плоскости пересекаются в соответствующей точке гиперплоскости F.*

Выражаю искреннюю благодарность проф. М. А. Акивису за постановку задачи и внимание к работе.

Московский институт стали и сплавов

Մ. Ա. ԱՆԴԻԿՅԱՆ

Աֆինական տարածության հագեցված մակերևույթին համաչափորեն կցված երեք-հյուսվածքների մասին

Աշխատանքում դիտարկվում է 2r-չափանի աֆինական տարածության r-չափանի մակերևույթին կցված երեք-հյուսվածքների մի հատուկ ընտանիք։ Ենթադրվում է, որ այդ հյուսվածքների Δ բաշխումը կախված է մակերևույթի կետից, և կախված չի շոշափող շերտավորման էլեմենտից։ Ցույց է տրվում, որ այդպիսի հյուսվածքը մակածում է մակերևույթի հագեցում, և այն անվանվում է այդ մակերևույթին համաչափորեն կցված։*

Գտնված են հյուսվածքը հագեցված մակերևույթին համաչափորեն կցված լինելու անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ։ Ապացուցված է նաև, որ այդ երեք-հյուսվածքը շոշափող շերտավորման մեջ մակածում է աֆինական կապակցություն, որը հանդիսանում է աֆինական կապակցության հորիզոնական բարձրացում՝ մակերևույթից-շոշափող շերտավորում։ Ցույց է տրված, որ հագեցված մակերևույթին կարելի է համաչափորեն կցել վեցանկյուն երեք-հյուսվածք r փոփոխականների 2r-ֆունկցիաների ազատությամբ։

Համաչափորեն կցված երեք-հյուսվածքը մակածում է փոխմիարժեք համապատասխանություն շոշափող և նորմալ շերտավորումների միջև։ Այդ համապատասխանության միջոցով, նորմալ շերտավորման մեջ կառուցվում է երեք-հյուսվածք, որի մի շերտավորումը համընկնում է նորմալ շերտավորման հետ։

Այնուհետև դիտարկվում են համաչափորեն կցված իզոկլին երեք-հյուսվածքները։ Գտնված են համաչափորեն կցված երեք-հյուսվածքի իզոկլին լինելու անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ։ Ապացուցված է, որ այս դեպքում գոյություն ունի մակերևույթին շոշափող (r—1) չափանի բաշխում, որի ինտեգրալային գծերի ուղղությամբ նորմալ հարթությունը տեղափոխվում է զուգահեռ, իսկ ցանկացած գծի ուղղությամբ, որը ինտեգրալային չէ այդ բաշխման համար, նորմալ հարթությունները հատվում են մի կետում, որը պատկանում է նորմալ հարթությունների ընտանիքի կիզող մակերևույթին։ Այդ կետերի բազմությունը նորմալ հարթությունների ընտանիքի կիզող մակերևույթներով որոշված հիպերհարթություն է։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. А. Акивис*, Труды геом. сем. ВИНИТИ, т. 2 (1969). [2] *М. А. Андикян*, Тезисы докл. 7-ой Всес. конф. по совр. проблемам геометрии, Минск, 1979. [3] *С. П. Фиников*, Метод внешних форм Картана, М.—Л., 1948. [4] *М. А. Акивис*, Сибирский мат. журн., т. 15, № 1 (1974). [5] *А. П. Норден*, Пространство аффинной связности, М., 1976. [6] *М. А. Акивис, А. В. Чакмазян*, ДАН АрмССР, т. 62, № 2 (1976). [7] *Н. М. Остиану, В. В. Рыжков, П. И. Швейкин*, Труды геом. сем. ВИНИТИ, т. 4 (1973). [8] *K. Yano, S. Ishihara*, Tangent and cotangent bundles. N.—Y., 1973. [9] *А. М. Шелехов*, Тезисы докл. 7-ой Всес. конф. по совр. проблемам геометрии, Минск, 1979.