ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXII 1981 4

УДК 62—501:519.217

МАТЕМАТИКА

В. К. Брутян

К задаче синтеза оптимальных линейных марковских управляемых систем методом канонических разложений

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 2/XII 1980)

Рассматривается линейная марковская управляемая система (МУС), поведение которой описывается на интервале времени $I_t \triangleq [t_0, T]$ векторно-матричным стохастическим дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + D(t)u(t) + G(t)\xi(t), \quad x(t_0) = x_0 \tag{1}$$

с линейным наблюдением

$$y(t) = H(t)x(t) + \eta(t),$$

где x, u и y—векторы состояния, управления и наблюдения размерами n, m и k соответственно, $\xi(t)$ и $\eta(t)$—случайные процессы типа нормального белого шума с математическими ожиданиями $m_\xi(t)$ и $m_\eta(t)$ и корреляционными функциями

$$K_{\xi\xi}(t, \tau) = S_{\xi\xi}(t)\delta(t-\tau), \quad K_{\eta\eta}(t, \tau) = S_{\eta\eta}(t)\delta(t-\tau),$$

где $S_{\xi\xi}(t)$ и $S_{\eta\eta}(t)$—положительно определенные непрерывные для всех $t \in I_t$ матрицы интенсивности нормальных белых шумов, $\delta(\cdot)$—дельта-функция Дирака. A, D, G и H—ограниченные и непрерывные на интервале I_t матрицы соответствующих размеров, причем элементы этих матриц не зависят от x и u. Предполагается, что процессы $\xi(t)$ и $\eta(t)$ являются независимыми друг от друга шумами, а начальное состояние x_0 системы (1) есть вектор, компоненты которого распределены по нормальному закону с числовыми характеристиками $m_0 = M\{x(t_0)\}$, $\Gamma_0 = M\{(x_0 - m_0)'(x_0 - m_0)\}$, где M—символ математического ожидания, „ ' “ знак транспонирования.

Пусть в МУС (1) синтез закона управления, который, разумеется, является функцией наблюдения $u = u(t, y(\tau) : \tau \in [t_0, t))$, предусматривает задание критерия качества в виде следующего функционала:

$$J(x, u, t) = x'_T \Gamma_T x_T + \int_{t_0}^{T} \{ [x'B(t)x + u'E(t)u] / y(\tau), \quad \tau \leqslant t \} dt, \tag{2}$$

что подлежит минимизации. Здесь Γ_T и $B(t)$ положительно полуопределенные матрицы, $E(t)$—положительно определенная матрица. Кроме того, матрицы $B(t)$ и $E(t)$ непрерывные на интервале I_t.

В отличие от работ [1-3], в данной статье функционал (2) рассматривается как случайная величина и числовые характеристики этой случайной величины исследуются с точки зрения задачи синтеза МУС. Показывается, что эта задача получает значительное упрощение с применением метода канонических разложений, разработанного В. С. Пугачевым [4], идея которого состоит в представлении случайной функции в виде суммы элементарных функций $x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i z_i(t)$, $t \in I_t$. Здесь скалярные случайные величины x_i являются коэффициентами канонического разложения, неслучайные вектор-функции $z_i(t)$—координатными функциями разложения. Они удовлетворяют соотношению

$$x'_T \Gamma_T z_{Ti} + \int_{t_0}^{T} x'(t) B(t) z_i(t) dt = x_i \tag{4}$$

и условию ортогональности

$$z'_{Ti} \Gamma_T z_{Tj} + \int_{t_0}^{T} z'_i(t) B(t) z_j(t) dt = \delta_{ij} \tag{5}$$

для всех i, $j \in [1, 2, \ldots]$. Предполагается также, что коэффициенты канонического разложения x_i взаимно дельта-коррелированы

$$M\{(x_i - m_i)(x_j - m_j)/y\} = s_i \delta_{ij}. \tag{6}$$

Здесь s_i—дисперсия случайной величины x_i, а условное математическое ожидание для x_i определяется соотношением

$$m_i = \hat{x}'_T \Gamma_T z_{Ti} + \int_{t_0}^{T} \hat{x}'(t) B(t) z_i(t) dt, \tag{7}$$

где

$$\hat{x}(t) = M\{x(t)/y(\tau), \quad \tau \leq t\}. \tag{8}$$

Заметим, что

а) Поскольку начальное значение x_0 нормально распределено, решение системы (1) является марковским процессом, условное математическое ожидание и корреляционная функция которого удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям [1-3,5]:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) + D(t)u(t) + K(t)[y(t) - H(t)\hat{x}(t)], \quad K(t) \triangleq R(t)H'(t)S^{-1}_{\eta\eta}(t), \tag{9}$$

$$\dot{R}(t) = A(t)R(t) + R(t)A'(t) + G'(t)S_{\xi\xi}(t)G(t) - K'(t)S_{\eta\eta}(t)K(t) \tag{10}$$

при начальных условиях $\hat{x}(t_0)=\hat{x}_0$, $R(t_0)=R_0$ соответственно.

б) Решение уравнения (10) может быть представлено в виде [6]

$$R(t)=W(t)\left[R_0+\int_{t_0}^{t}(W^{-1}(s))'H'(s)S_{\eta\eta}(s)H(s)(W^{-1}(s))ds\right]W'(t),$$

где $W(t)$—матрица фундаментальных решений однородного уравнения

$$\dot{\hat{x}}(t)=[A(t)-D(t)C(t)]\hat{x}(t).$$

Необходимым и достаточным условием выполнения равенства (6) является условие

$$s_i z_i(t)=R(t,T)\Gamma_T z_{Ti}+\int_{t_0}^{T}R(t,\tau)B(\tau)z_i(\tau)d\tau,\quad t\in I_t, \tag{11}$$

где

$$R(t,\tau)=M\{[x(t)-\hat{x}(t)]'[x(\tau)-\hat{x}(\tau)]/y(\tau),\ \tau\leqslant t\},\quad t,\tau\in I_t.$$

При сделанных допущениях случайная величина J почти всюду ограничена. Из этого следует, что ряд (4) сходится в интегрально квадратичном смысле (т. е. ряд сходится в метрике пространства L_2— пространства функций с суммируемым квадратом [7]):

$$J=\sum_{i=1}^{\infty}x_i^2+\int_{t_0}^{T}u'(t)E(t)u(t)dt.$$

Условные характеристические функции для каждого члена x_i^2 имеют вид [8,9]

$$\varphi_{\hat{x}_i^2}(j\omega)=M\{\exp(j\omega x^2)\}=\frac{1}{\sqrt{1-2j\omega S_i}}\exp\left(\frac{j\omega m_i^2}{1-2j\omega S_i}\right).$$

Тогда условная характеристическая функция для функционала J будет

$$\varphi_J(j\omega)=M\{\exp(j\omega J)\}=\left(\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{\infty}\sqrt{1-2j\omega S_i}}\right)\times$$

$$\times\left\{\exp\left\{j\omega\left[\sum_{i=1}^{\infty}\frac{m_i^2}{1-2j\omega S_i}+\int_{t_0}^{T}u'(t)E(t)u(t)dt\right]\right\}\right\}. \tag{12}$$

Здесь целесообразно рассмотреть условные семиинварианты $\hat{C}_1$, $\hat{C}_2$, ..., $\hat{C}_k$, определяемые разложением [9–12]

$$\hat{\varkappa}_J(\lambda) \triangleq \ln \varphi_J(j\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \frac{(j\omega)^k}{k!}, \qquad \omega = \exp \lambda,$$

где k-й условный семиинвариант случайной величины J есть k-ая производная функции $\hat{\varkappa}_J(\lambda)$, вычисленная в точке $\lambda=0$

$$C_k = \frac{d^k \hat{\varkappa}_J(\lambda)}{d\lambda^k} \Big/ \lambda = 0.$$

Покажем, что числовые характеристики случайной функции J могут быть выражены через семиинварианты. Используя формулу (12), получим, что первые два условных семиинварианта функционала J имеют вид

$$\hat{C}_1 = \sum_{i=1}^{\infty} (s_i + m_i^2) + \int_{t_0}^{T} u'(t) E(t) u(t) dt,$$

$$\hat{C}_2 = 2 \sum_{i=1}^{\infty} s_i (s_i + 2m_i^2).$$

Следует заметить, что при синтезе МУС на первый взгляд не очень удобно пользоваться семиинвариантами, поскольку они не выражаются через переменные системы. Чтобы преодолеть эту трудность, введем вспомогательную функцию $\bar{R}(t, \tau)$, определяемую следующим образом:

$$\bar{R}(t, \tau) \triangleq R(t, T) \Gamma_T R(T, \tau) + \int_{t_0}^{T} R(t, \sigma) B(\sigma) R(\sigma, \tau) d\sigma.$$

Используя формулы (5) и (11), получим

$$\bar{R}(t, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} s_i^2 z_i(t) z_i(\tau).$$

Отсюда следует

$$\sum_{i=1}^{\infty} s_i^2 = \text{След} \left[\Gamma_T \bar{R}_T + \int_{t_0}^{T} B(t)\, \bar{R}(t, t)\, dt \right]. \tag{13}$$

Из выражений (7), (8) и (13) получим соотношение

$$\sum_{i=1}^{\infty} m_i^2 s_i = \hat{x}'_T \Gamma_T R_T \Gamma_T \hat{x}_T + \hat{x}'_T \Gamma_T \Phi_T + \Phi'_T \Gamma_T \hat{x}_T + \int_{t_0}^{T} \hat{x}'(t) B(t) \Phi(t) dt,$$

где

$$\Phi(t) \triangleq \int_{t_0}^{T} R(t,\tau) B(\tau) \hat{x}(\tau) d\tau, \tag{14}$$

причем $\Phi(t_0)=0$.

Условные семиинварианты запишем в виде

$$\hat{C}_1 = \hat{x}'_T \Gamma_T \hat{x} + \int_{t_0}^{T} [\hat{x}'(t) B(t) \hat{x}(t) + u'(t) E(t) u(t)] dt +$$

$$+ \text{След} \left[\Gamma_T R_T + \int_{t_0}^{T} B(t) R(t, t) dt \right],$$

$$\hat{C}_2 = 4 \left[\hat{x}'_T \Gamma_T R_T \Gamma_T \hat{x}_T + 2 \hat{x}'_T \Gamma_T \Phi_T + \int_{t_0}^{T} \hat{x}'(t) B(t) \Phi(t) dt \right] +$$

$$+ 2 \, \text{След} \left[\Gamma_T \tilde{R}_T + \int_{t_0}^{T} B(t) \tilde{R}(t, t) dt \right]. \tag{15}$$

Таким образом, условные семиинварианты выражаются через оценки марковского процесса $\hat{x}(t)$ и вспомогательную функцию $\tilde{R}(t, \tau)$. Условные семиинварианты и условные моменты случайной величины J связаны между собой соотношениями ([10–12])

$$C_1 = \hat{C}_1, \quad C_2 = \hat{C}_2 - \hat{C}_1^2. \tag{16}$$

Выбранное число первых семиинвариантов несет в себе столько же информации, сколько и первые два момента, необходимые для описания МУС.

Полученные результаты в поставленной задаче линейного синтеза МУС можно применить следующим образом. С учетом соотношений (16) имеем критерий

$$\min \{ \hat{C}_1 + \alpha (\hat{C}_2 - \hat{C}_1^2) \}, \tag{17}$$

где α—весовой коэффициент. При $\alpha = 0$ функционал (17) становится традиционным. При $\alpha \neq 0$ получается новый класс задач синтеза МУС, структура и решение которого, как показано ниже, сводится к известному классу ([1–3,6]). В (17), подставляя $\hat{C}_1$ и $\hat{C}_2$ из формул (15), учитывая уравнения (9), (10) и опуская $\hat{C}_1^2$, получим расширенный функционал

$$\min_{u}\left\{\hat{x}'_T\Gamma_T\hat{x}_T+\int_{t_0}^{T}[\hat{x}'(t)B(t)\hat{x}(t)+u'(t)E(t)u(t)]dt+\right.$$

$$\left.+4\alpha\hat{x}'_T\Gamma_T(R_T\Gamma_T\hat{x}_T+\hat{l}_T)+4\alpha\int_{t_0}^{T}\hat{x}'(t)B(t)\hat{l}(t)dt\right\}, \tag{18}$$

где

$$\dot{\hat{l}}(t)=[A(t)-K(t)H(t)]\hat{l}+R(t)B(t)\hat{x},\quad \hat{l}(t_0)=0.$$

После введения расширенных векторов и матриц

$$\bar{x}(t)\triangleq\begin{vmatrix}\hat{x}(t)\\ l(t)\end{vmatrix},\ \bar{B}(t)\triangleq\begin{vmatrix}B(t) & 2\alpha B(t)\\ 2\alpha B(t) & 0\end{vmatrix},\ \bar{D}(t)\triangleq\begin{vmatrix}D(t)\\ 0\end{vmatrix},$$

$$\bar{u}(t)\triangleq[u(t)\ \ 0]',\ \bar{E}(t)\triangleq[E(t)\ \ 0]',$$

$$\bar{A}(t)\triangleq\begin{vmatrix}A(t) & 0\\ R(t)B(t) & A(t)-K(t)H(t)\end{vmatrix},\ \ \bar{\Gamma}_T\triangleq\begin{vmatrix}\Gamma_T+4\alpha\Gamma'_TR_T\Gamma_T & 4\alpha\Gamma\\ 4\alpha\Gamma_T & 0\end{vmatrix}$$

критерий (18) примет вид

$$\min_{u}\left\{\bar{x}'_T\bar{\Gamma}_T\bar{x}_T+\int_{t_0}^{T}[\bar{x}'(t)\bar{B}(t)\bar{x}(t)+\bar{u}'(t)\bar{E}(t)\bar{u}(t)]dt\right\},$$

который относится к расширенной системе

$$\dot{\bar{x}}(t)=\bar{A}(t)\bar{x}(t)+\bar{D}(t)\bar{u}(t),\quad \bar{x}(t_0)\triangleq[x_0\ \ 0]'.$$

Решение расширенной задачи сводится к известному закону управления

$$\bar{u}(\bar{x},t)=-\bar{E}^{-1}(t)\bar{D}'(t)\bar{\Gamma}(t)\bar{x}(t),$$

где коэффициент усиления $\bar{\Gamma}(t)$ есть матрица размера $2n\times 2n$ и является на интервале времени I_t решением уравнения Риккати

$$\dot{\bar{\Gamma}}=-\bar{\Gamma}\bar{A}-\bar{A}'\bar{\Gamma}-\bar{B}+\bar{\Gamma}\bar{D}\bar{E}^{-1}\bar{D}'\bar{\Gamma}$$

с граничным условием $\bar{\Gamma}(T)=\bar{\Gamma}_T$.

Ереванский институт
народного хозяйства

Վ. Կ. ԲՐՈՒՏՅԱՆ

Մարկովյան ղեկավարելի համակարգերի կանոնական վերլուծման մեթոդով օպտիմալ սինթեզման խնդրի վերաբերյալ

Դիտարկվում է մարկովյան ղեկավարելի համակարգի գծային սինթեզման խնդիրը։ Ի տարբերություն գոյություն ունեցող աշխատանքների, այստեղ ենթադրվում է, որ քառակուսային ֆունկցիոնալը իրենից ներկայացնում է պատահական մեծություն և հետազոտվում է այդ մեծության թվային բնութագրերը մարկովյան ղեկավարելի համակարգերի գծային սինթեզման խնդրի տեսանկյունից։ Ապացուցված է, որ սինթեզման խնդրի լուծումը զգալիորեն պարզեցվում է կանոնական վերլուծման մեթոդի կիրառմամբ։ Ղեկավարելի համակարգի փոփոխականները և պատահական ֆունկցիոնալի բնութագրերը արտահայտվում են սեմիինվարիանտների միջոցով, իսկ հետո հիմնավորվում է ղեկավարման օրենքը, որ մինիմիզացնում է պատահական ֆունկցիոնալի մաթեմատիկական սպասման և ֆունկցիոնալի կշռային գումարը։ Ստացվում է մարկովյան ղեկավարելի համակարգի սինթեզման խնդրի նոր դաս, որի կառուցվածքը և լուծումը բերվում է հայտնի արդյունքների։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. К. Брутян,* Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, № 1, 1975. [2] *В. К. Брутян,* Учен. зап. ЕрГУ, сер естественных наук, № 1, 1977 [3] *В. К. Брутян,* Автоматика и телемеханика, № 7, 1980. [4] Основы автоматического управления. Под ред. В. С. Пугачева, Изд. ФМГ, М., 1963. [5] *В. К. Брутян,* Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, № 6, 1980. [6] *Я. Н. Ройтенберг,* Автоматическое управление, Наука, М., 1978. [7] *А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин,* Элементы теории функции и функционального анализа. Наука, М, 1977. [8] *П. Леви,* Стохастические процессы и броуновское движение. Наука, М., 1972. [9] *Ю. В. Прохоров, Ю. А. Розанов,* Теория вероятностей. Наука, М., 1967. [10] *В. С. Пугачев,* Изв. АН СССР, ОТН. Энергетика и автоматика, № 3, 1961. [11] *Б. В. Гнеденко,* Курс теории вероятностей, Наука, М., 1965. [12] *А. Б. Куржанский,* Управление и наблюдение в условиях неопределенности, Наука, М., 1977