ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXII 1981 4

УДК 517.51

МАТЕМАТИКА

Г. Г. Геворкян

О множествах единственности для полных ортонормированных систем и интегралов Фурье

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 27/XI 1980)

В настоящей работе исследуется вопрос о существовании множеств единственности, имеющих сколь угодно малую положительную меру, как для любых полных ортонормированных систем, так и для некоторых интегральных преобразований.

Следуя работам ([1,2]), введем следующее

Определение 1. Пусть $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ полная в $L_2[0, 1]$ ортонормированная система. Множество $E\subset[0, 1]$ называется множеством единственности системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, если из условий $f(x)=0$ при $x\in E$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\int f\varphi_n|^p<+\infty$ для некоторого $0<p<2$ следует, что $f(x)$ обращается в нуль почти всюду на $[0,1]$.

Аналогично можно ввести определение множеств единственности и для интегральных преобразований.

Определение 2. Пусть ядро $K(x, t)$, $0\leqslant x$, $t<+\infty$, такое, что для любой функции

$$\underset{\sigma\to\infty}{\mathrm{l\cdot i\cdot m}}\int\limits_0^{\sigma}K(x, t)f(t)dt=\hat{f}(x)^*,\text{ где }\hat{f}(x)\in L_2(0, +\infty),\tag{1}$$

$$\|f\|_2=\|\hat{f}\|_2^{**}\tag{2}$$

множество E, $E\subset(0, +\infty)$ называется множеством единственности для ядра $K(x, t)$, если из условий $f(x)=0$ при $x\in E$ и $\hat{f}(x)\in L_p(0,+\infty)$ для некоторого $1\leqslant p<2$ следует, что $f(x)=0$ почти всюду на $[0, +\infty)$.

Верны следующие теоремы.

---

* $\underset{\sigma\to\infty}{\mathrm{l\cdot i\cdot m}}$ обозначает предел в смысле сходимости в $L_2(0, +\infty)$ при $\sigma\to\infty$.

** $\|f\|_p=\left(\int\limits_0^{\infty}|f(x)|^p dx\right)^{1/p}$.

Теорема 1. *Для любой полной ортонормированной в $L_2[0,1]$ системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и любого $\varepsilon>0$ существует измеримое множество $E\subset[0, 1]$, $\mu E<\varepsilon$, которое является множеством единственности для $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$.*

Теорема 2. *Пусть ядро $K(x, t)$ удовлетворяет условиям* (1), (2) *и, кроме того, ограничено в любой полосе* $(0, +\infty)\times(0, a)$, т. е. *для любого $a>0$ существует $M(a)$ такое, что*

$$|K(x, t)|<M(a)<\infty, \quad \text{когда} \quad 0\leqslant t\leqslant a, \quad 0\leqslant x<+\infty. \tag{3}$$

Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует измеримое множество $E\subset(0, +\infty)$, $\mu E<\varepsilon$, которое является множеством единственности для ядра $K(x, t)$.

Теорема 1 является обобщением теоремы Голзани ([1]), который аналогичный результат установил в том частном случае, когда функции системы $\{\varphi_n(x)\}$ равномерно ограничены.

Из теоремы 2 непосредственно следует

Теорема 3. *Для любого $\varepsilon>0$ существует измеримое множество $E\subset(-\infty, +\infty)$, $\mu E<\varepsilon$, которое обладает следующими свойствами:*

1) *если* $f\in L_2(-\infty, +\infty)$, $f(x)=0$ *при* $x\in E$ *и* $\hat{f}(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-itx}dt\in L_p(-\infty, +\infty)$ *для некоторого p, $1\leqslant p<2$, то $f(x)=0$ почти всюду на $(-\infty, +\infty)$;*

2) *если* $f(x)\in L_p(-\infty, +\infty)\cap L_2(-\infty, +\infty)$ *для некоторого p, $1\leqslant p<2$ и $\hat{f}(x)=0$ при $x\in E$, то $f(x)=0$ почти всюду на $(-\infty, +\infty)$.*

Теоремы 1 и 2 доказываются, соответственно, при помощи следующих лемм.

Лемма 1. *Пусть $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ произвольная полная в $L_2(0, 1)$ ортонормированная система. Тогда для любых $\varepsilon>0$, $q>2$ и $(0, a)\subset\subset(0, 1)$ существуют измеримое множество $E_1\subset(0, a)$ и ограниченная функция $f(x)$ такие, что:*

1) $f(x)=0$, *когда* $x\in(a, 1)$;

2) $f(x)=1$, *когда* $x\in(0, a)\setminus E_1$, $\mu E_1<\varepsilon$;

3) $\left\{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\int\limits_0^1 f(x)\varphi_n(x)dx\right|^q\right\}^{1/q}<\varepsilon.$

Лемма 2. *Пусть $K(x, t)$ ядро, удовлетворяющее условиям* (1), (2), (3). *Тогда для любых $a\in(0, +\infty)$, $a>\varepsilon>0$ и $q>2$ существуют функция $f(x)\in L_2(0, +\infty)$ и множество $E_1\subset(0, a)$ такие, что:*

1) $f(x)=0$, $x\in(a, +\infty)$;

2) $f(x)=1, \quad x\in(0, a)\setminus E_1, \quad \mu E_1<\varepsilon$;

3) $\|\hat{f}(x)\|_q<\varepsilon$.

Эти леммы доказываются путем использования лемм А. А. Талаляна, установленных в работах ([3,4]) (см. ([3]), лемма 2, а также ([4]), лемма 1 и ([5]), леммы 2.11.3, 2.11.4). Здесь приводится доказательство теоремы 2. Доказательство теоремы 1, а также леммы 1 аналогично нижеприведенным доказательствам теоремы 2 и леммы 2.

Лемма 2 доказывается при помощи следующей леммы, доказательство которой фактически приведено в ([4]) (см. лемму 1).

Лемма 3. *Пусть* $K(x, t)$ *ядро, удовлетворяющее условиям* (1), (2), $[a, b]\subset(0, +\infty)$ и $A\subset(0, +\infty)$ *измеримые множества конечной меры. Тогда для любых* $1>\varepsilon>0$, $\alpha>0$ и $\beta>0$ *существует множество* $E\subset[a, b]$, $\mu E=\varepsilon(b-a)$, *такое, что* $f(x)=\chi_{[a,b]}(x)-\frac{1}{\varepsilon}\chi_E(x)$ *удовлетворяет следующему условию:*

$$\mu\{x\in A:|\hat{f}(x)|>\alpha\}<\beta.$$

Доказательство леммы 2. Интервал $(0, a)$ разделим на n равных частей $I_1, I_2, \ldots, I_n$ (n будет выбрано несколько позже). Из леммы 3 вытекает существование функции $f(x)$ такой, что:

$$f_1(x)=0, \quad x\notin I_1; \tag{4}$$

$$f_1(x)=1, \quad x\in I_1\setminus E_1, \ \mu E_1=\frac{\varepsilon}{n}; \tag{5}$$

$$\mu\left\{x\in[0, 1]:|\hat{f}_1(x)|>\frac{\gamma}{2}\right\}<\frac{\varepsilon_1}{2}; \tag{6}$$

$$\|f_1\|_2^2=\|\hat{f}_1\|_2^2<\frac{2a^2}{\varepsilon n}. \tag{7}$$

Произвольные постоянные $\gamma>0$ и $\varepsilon_1>0$ будут выбраны позже.

Допустим, что функции $f_1, \ldots, f_{\nu-1}$ и множества $B_1=[0, 1]\subset\subset B_2\subset\ldots\subset B_{\nu-1}$, $(\nu<n)$ уже построены. Существует множество B_ν такое, что

$$\left|\sum_{l=1}^{\nu-1}\hat{f}_l(x)\right|<\frac{\gamma}{2^\nu}, \quad x\in B_\nu, \quad \mu B_\nu<+\infty. \tag{8}$$

Из леммы 3 и (8) следует существование функции $f_\nu(x)$ такой, что:

$$f_\nu(x)=0, \quad x\notin I_\nu; \tag{9}$$

$$f_\nu(x)=1, \quad x\in I_\nu\setminus E_\nu, \ \mu E_\nu=\frac{\varepsilon}{n}; \tag{10}$$

$$\mu\left\{x\in B_\nu:|\hat{f}_\nu(x)|>\frac{\gamma}{2^\nu}\right\}<\frac{\varepsilon_1}{2^\nu}; \tag{11}$$

$$\|\hat{f}_\nu\|_2^2 < \frac{2a^2}{\varepsilon n}. \tag{12}$$

Положим $f(x) = \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(x)$. Из (4), (5), (9), (10) следует 1) и 2) леммы. Покажем, что числа n, γ и ε можно выбрать такими, что $\|\hat{f}\|_q < \varepsilon$.

Очевидно, что (см. (1), (3))

$$|\hat{f}_\nu(x)| < \frac{M(a)a^2}{\varepsilon n} \quad \textit{для любых} \quad x \in (0, +\infty),\ 1 \leqslant \nu < n. \tag{13}$$

Поэтому (см. (8))

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(x)\right| < \frac{\gamma}{2^n} + \frac{M(a)a^2}{\varepsilon n}, \quad x \in B_n. \tag{14}$$

Обозначим через $A_\nu = \left\{x \in B_\nu : |\hat{f}_\nu(x)| > \frac{\gamma}{2^\nu}\right\}$. Пусть $x \in (B_\nu \setminus B_{\nu-1}) \setminus \bigcup_{-1}^{n} A_i$ $1 < \nu \leqslant n$. Тогда из (8), (11) и (13) вытекает

$$|\hat{f}(x)| = \left|\sum_{i=1}^{n} \hat{f}_i(x)\right| \leqslant \left|\sum_{i=1}^{\nu-2} \hat{f}_i(x)\right| + |\hat{f}_{\nu-1}(x)| + \sum_{i=\nu}^{n} |f_i(x)| <$$

$$< \frac{\gamma}{2^{\nu-1}} + \frac{M(a)a^2}{\varepsilon n} + \sum_{i=\nu}^{n} \frac{\gamma}{2^i} < \frac{M(a)a^2}{\varepsilon n} + \gamma. \tag{15}$$

Когда $x \in B_1 \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, имеем

$$|\hat{f}(x)| \leqslant |\hat{f}_1(x)| + \sum_{i=2}^{n} \left|\hat{f}_i(x)\right| < \frac{\gamma}{2} + \sum_{i=2}^{n} \frac{\gamma}{2^i} < \gamma. \tag{16}$$

Из (14), (15), (16) вытекает

$$|\hat{f}(x)| < \frac{M(a)a^2}{\varepsilon n} + \gamma \quad \text{при} \quad x \notin \bigcup_{\nu=1}^{n} A_\nu, \tag{17}$$

причем

$$\mu \bigcup_{\nu=1}^{n} A_\nu < \varepsilon_1. \tag{18}$$

Имеем (см. 13), (17), (18) и (12))

$$\int_0^{+\infty} |\hat{f}(x)|^q dx = \int_{\bigcup_{\nu=1}^{n} A_\nu} |\hat{f}(x)|^q dx + \int_{\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} A_\nu\right)^c} |\hat{f}(x)|^2 \cdot |\hat{f}(x)|^{q-2} dx \leqslant \left(\frac{M(a)a^2}{\varepsilon}\right)^q \cdot \varepsilon_1 +$$

$$+ \left(\frac{M(a)a^2}{\varepsilon n} + \gamma\right)^{q-2} \int_{\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} A_\nu\right)^c} |\hat{f}(x)|^2 dx \leqslant \left(\frac{M(a)a^2}{\varepsilon}\right)^q \varepsilon_1 + \left(\frac{M(a)a^2}{\varepsilon n} + \gamma\right)^{q-2} \frac{2a^2}{\varepsilon}. \tag{19}$$

Из того, что $q>2$, следует, что n можно выбрать настолько большим, а γ и ε_1 настолько малыми, чтобы последнее выражение было меньше, чем ε^q. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\{x_k\}_{n=1}^{\infty}$ всюду плотно в $(0, +\infty)$, $p_n \uparrow 2$, $\frac{1}{p_n}+\frac{1}{q_n}=1$ и $\varepsilon_k^n>0$ такие, что $\sum\limits_{n,k=1}^{\infty} \varepsilon_k^n<\varepsilon$. Тогда из леммы 2 вытекает существование функций $\varphi_k^n(x) \in L_2(0, +\infty)$ таких, что:

1) $\varphi_k^n(x)=0, \quad x \notin (0, x_k)$;

2) $\varphi_k^n(x)=1, \quad x \in (0, x_k) \setminus E_k^n, \quad \mu E_k^n \leqslant \varepsilon_k^n$;

3) $\|\hat{\varphi}_k^n\|_{q_n}<\varepsilon_k^n$.

Покажем, что $E=\bigcup\limits_{k,n=1}^{\infty} E_k^n$ — множество единственности (ясно, что $\mu E<\varepsilon$).

Пусть $f(x)=0$ на E и $\hat{f}(x) \in L_p(0, +\infty)$ для некоторого $1 \leqslant p<2$. Для достаточно больших n (когда $p_n>p$) имеем

$$\left|\int_0^{x_k} f(x) d x\right|=\left|\int_0^{+\infty} f(x) \varphi_k^n(x) d x\right|=\left|\int_0^{+\infty} \hat{f}(x) \hat{\varphi}_k^n(x) d x\right| \leqslant$$

$$\leqslant\|\hat{f}\|_{p_n} \cdot\|\varphi_k^n\|_{q_n}<(\|\hat{f}\|_p^p+\|\hat{f}\|_2^2)^{1/p_n} \varepsilon_k^n .$$

Из того, что $\lim\limits_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_k^n=0$, следует:

$$\left|\int_0^{x_k} f(x) d x\right|=0 .$$

Отсюда следует, что $f(x)=0$. Теорема 2 доказана.

В заключение выражаю благодарность А. А. Талаляну, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Ереванский государственный
университет

Գ. Գ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ

Լրիվ օրթոնորմալ համակարգերի և Ֆուրյեի ինտեգրալների միակության բազմությունների մասին

Աշխատանքում ապացուցված են.

Թեորեմ **1.** Կամայական $\{\varphi_n\}$ լրիվ օրթոնորմալ համակարգի և $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի չափելի բազմություն E, $\mu E<\varepsilon$, այնպիսին,

որ $f(x)=0$ E-ի վրա և $\sum_{n=1}^{\infty}|\int f\varphi_n|^p<+\infty$ որևէ $p<2$ համար պայմաններից հետևում է, որ $f(x)=0$ հ. ա.:

Թեորեմ 2. Դիցուք $K(x, t)$-ն այնպիսի կորիզ է, որ կամայական $f(x)\in L_2(0, +\infty)$ ֆունկցիայի և կամայական $a>0$ թվի համար

$$\lim_{a\to\infty}\int_0^a K(x, t)f(t)dt=\hat{f}(x)$$

$$\int_0^{+\infty}|f(x)|^2dx=\int_0^{+\infty}|\hat{f}(x)|^2dx$$

$$|K(x, t)|<M(a)<+\infty \text{ երբ } 0\leqslant x<+\infty,\ 0\leqslant t\leqslant a.$$

Այդ դեպքում կամայական $\varepsilon>0$ համար գոյություն ունի $E\subset(0, +\infty)$ $\mu E<\varepsilon$, որն օժտված է հետևյալ հատկությամբ. երբ $f(x)=0$ E-ի վրա և $f(x)\in L_p(0, +\infty)$ որևէ $p<2$ համար, ապա՝ $f(x)=0$ հ. ա.:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *L. Golzani*, Bolletino U.M.I. vol. 5, 16—B(1979). [2] *Y. Katznelson*, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 70 (1964). [3] *А. А. Талалян*, УМН, т. 15. № 5 (95) (1960). [4] *А. А. Талалян*, Мат. сб., т. 53 (95), № 3 (1961). [5] *Г. Алексич*, Проблемы сходимости ортогональных рядов, ИЛ, М., 1963