УДК 51 : 621.391

МАТЕМАТИКА

Э. М. Погосян

К параметрам комбинаторной оптимизации и сравнительному анализу проблем формирования образов

(Представлено чл.-корр АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 3/Х 1980)

1. Сложность заданной проблемы, вообще говоря, зависит от выбранного в рамках класса эквивалентности конкретного представления этой проблемы, что порождает необходимость введения понятия оптимального представления. При выбранных критериях сложности и эквивалентности оптимальным представлением проблемы естественно считать такое, при котором сложность проблемы минимальна относительно всех проблем класса эквивалентности.

С оптимизацией представлений проблем, в частности их адаптацией, тесно связаны вопросы оптимизации разрешающих алгоритмов этих проблем, поскольку конструкции оптимальных алгоритмов могут быть основаны на использовании закономерностей, полученных как в рамках заданного представления, так и в процессе выявления структуры оптимального представления.

При поиске перспективных путей решения вышеуказанных вопросов возникает необходимость в выявлении связей между сложностью проблемы и параметрами, определяющими их конкретное представление. В нижеследующей теореме 1 при определенных допущениях указывается на такую связь между параметрами инициально пустых комбинаторных проблем в форме проблем расшифровки описаний (ПРО) и нижними оценками пиковой (π) или средней (σ) сложностями этих проблем. Как следствие теоремы 1 получены сравнительные характеристики $\pi(\sigma)$ -сложностей проблем формирования образов ситуаций (ФОС), эквивалентных по множеству искомых решений, но имеющих либо традиционную постановку, либо порожденную нами из проблемы оптимального комбинаторного управления (ПОУ). Некоторые достаточные условия эквивалентности указанного типа для тех же ФОС приведены в теореме 2.

2.1. В дальнейшем изложении определения и обозначения, введенные в (1) и (2), предполагаются известными.

Теорема 1. Для произвольной ПРО1 $\langle M, T', \varphi, U, C_0, C_1 \rangle$ и $u \in U$, если $|M| = n$, мощности φ -образов $|\varphi(u)|$ и множества возможных решений $|T'_u|$ не зависят от u и равны r и $\alpha|T'|$ при $0 < \alpha \leq 1$, соответственно, то $\pi(\sigma)$ -сложность этой ПРО1 больше

$$\log \frac{1}{1 - \frac{\alpha|T'| - r - 1}{2^n}}$$

2.2. Исходя из предположения о том, что упорядочение $\pi(\sigma)$ -сложностей проблем типа ПРО1 аналогично упорядочению соответствующим им оценкам теоремы 1, можно сформулировать следующее

Следствие 1.1. При прочих фиксированных параметрах $\pi(\sigma)$ -сложность ПРО1 уменьшается с уменьшением числа допустимых решений $\alpha|T'|$ или с ростом числа эквивалентных решений r и не возрастает с ростом числа элементарных описаний n .

Последнее утверждение сравнительно неожиданно. Оно следует из неравенства $\alpha|T'| \geq r + 1$ и может интерпретироваться как невозрастание $\pi(\sigma)$ -сложности с ростом мощности описательных средств и неизменной области поиска в множестве решений.

При одновременном изменении параметров ПРО1 справедливо следующее

Следствие 2.1. $\pi(\sigma)$ -сложность ПРО1 уменьшается, если отношение числа недопустимых решений $(\alpha|T'| - r - 1)$ к общему числу всех решений 2^n уменьшается.

2.3. В (1) говорилось о возможности использования в качестве нижних оценок $\pi(\sigma)$ -сложностей изначально пустых ПРО минимальных тестов соответствующих этим проблемам таблиц. Развивая это предположение, представляется правдоподобным расширить утверждение теоремы 1 с некоторыми изменениями на ПРО произвольного типа. А именно, полагая, что при переходе от некоторой изначально пустой ПРО к эквивалентной ей изначально полной, отличной от исходной только множеством входных записей, при каждой входной записи происходит лишь дополнительное сужение областей возможных решений, предлагается учесть это сужение посредством введения в оценку сложности теоремы 1 коэффициента γ , $0 < \gamma \leq 1$, роль и место которого в оценке аналогичны α .

3.1. Используем выводы следствия 2.1 для сравнения (в рамках предположения) $\pi(\sigma)$ -сложностей конкретных эквивалентных проблем, имеющих различные представления, а именно, ФОС типов 1—3.

Предварительно определим ряд понятий, конкретизированных в целях наглядности для ПОУ в шахматах (ПОУ^ш).

3.2. Произвольные комбинаторные проблемы L_1 и L_2 (в частности, в форме ПРО) назовем эквивалентными, если для множеств входных — X_1 , выходных — Y_1 записей и отношения φ_1 , $\varphi_1 \subseteq X_1 \times Y_1$, в L_1 , и соответственно, X_2 , Y_2 , φ_2 в L_2 , заданы операторы кодирования $\xi_1: X_1 \rightarrow X_2$, $\xi_2: Y_1 \rightarrow Y_2$ и декодирования $\xi'_1: X_2 \rightarrow X_1$, $\xi'_2: Y_2 \rightarrow Y_1$ такие,

что ξ_1 и ξ_1' определяют взаимно-однозначное соответствие между классами входных записей с одинаковыми φ -образами (классами синонимов в X_1 и X_2) и $\forall x_1 x_2 y_1 y_2 (x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, y_1 \in Y_1, y_2 \in Y_2) (x_1 \varphi_1 y_1 \leftrightarrow \xi_1(x_1) \varphi_2 \xi_2(y_1)) \& (x_2 \varphi_1 y_2 \leftrightarrow \xi_1'(x_2) \varphi_1 \xi_2'(y_2))$.

При постановке ФОС 1—3 нами используются формулы языка первого порядка L с конечным числом функциональных и предикатных символов. Структура A^* для L определяется естественным образом для конечного универсума A , что позволяет каждую формулу языка $L(A^*)$, полученного добавлением к L имен всех индивидов из A , представить в эквивалентной конъюнктивной нормальной форме (к. н. ф.).

В множестве индивидов различаются простые (пешка, клетка) и составные (позиция, стратегия). Для последних вводится понятие разложения на простые. *Полное описание* заданного индивида и понимается как множество всех неэквивалентных истинных на разложении a к. н. ф. с хотя бы одним вхождением в них имени из разложения a . *Частичное описание* a или просто *описание* a есть произвольное подмножество полного. Формула E языка $L(A^*)$ называется *описанием* в A^* , если E применимо к хотя бы одному индивиду из универсума, а множество всех индивидов, к которым E применимо, называется E -классом. Бинарное отношение *выигрышности* θ_1 на множестве всех описаний отражает объективно существующий порядок на множестве индивидов, в частности, ситуаций, относительно их возможностей и связей с целевыми ситуациями ПОУ^{III}, а также наше наличное знание этого порядка и способность к его конкретному использованию. $\langle P, F, l \rangle$ стратегии определяют P -стратегии, концевые вершины которых имеют описания не хуже F относительно упорядочения θ_1 , и одновременно это свойство в каждой такой вершине x сохраняется до глубины не менее l посредством навешивания в них дополнительных x -стратегий. $\langle P, F, l \rangle$ стратегии и их объединения описывают знания типа комбинация, форсированный вариант, эндшпильная стратегия и др.

«Знания» типа цели понимаются нами как описания ситуаций, определенным образом связанных с достижением целевых ситуаций исследуемой проблемы. Сами же процедуры, определяющие связь рассматриваемых ситуаций с другими—известной полезности, как описания некоторого смысла этих ситуаций. Произвольное описание E целевых позиций ПОУ^{III} одного и того же типа называется $\langle E, l^* \rangle$ целью или глобальной целью, где l^* —константа порядка глубины дерева игры. Пусть $F = \langle F_1, l_1 \rangle$ цель, где F —описание ситуаций, а $l_1 \leq l^*$; произвольное описание E называется $\langle F, l \rangle$ целью или локальной целью, если при мощности E -класса t можно указать натуральные числа n и l такие, что $n \leq t$ и для каждой позиции P E -класса с частотой n/t существует некоторая $\langle P, F, l \rangle$ стратегия.

Данное определение целей одновременно является некоторой гипотезой о способе их порождения.

Произвольная $\langle F, l \rangle$ цель E называется $\langle F, l \rangle$ образом позиций, если описание E является тупиковым, т. е. никакое подмножество дизъюнктов к. н. ф. E или частей этих дизъюнктов свойством быть $\langle F, l \rangle$ целью не обладает.

Определение $\langle F, l \rangle$ образа позиций характеризует шахматные понятия через цели, «в улучшенном» представлении. Данная гипотеза хорошо согласуется с результатами нашего анализа более 200 шахматных понятий и позволяет взглянуть на проблему синтеза образов с позиций, отличных от традиционных.

Исходя из гипотезы о том, что оптимальный алгоритм решения ПОУ^ш основан на подпрограммах поиска по каждой заданной позиции оптимальных управлений из тезауруса, содержащего все такие управления (проблема НОПТ в (1), в определении оптимального $\langle F, l \rangle$ образа E^* хотелось бы учесть три не всегда совместимых требования: максимальные мощность и частоту существования $\langle F, l \rangle$ стратегий для E^* -класса позиций при одновременно минимальном времени распознавания принадлежности позиций к этому классу. Поэтому E^* понимается как $\langle F, l \rangle$ образ с максимальной частотой существования $\langle F, l \rangle$ стратегий и такой, что при минимальной длине записи E^* -класс достигает наибольшей мощности.

Отметим, что вышеуказанные типы «знаний» являются либо компонентами, либо характеристиками процесса порождения закономерностей—текстов вида $F_1 \Rightarrow F_2$, где F_1, F_2 —формулы в определенном расширении языка l такие, что F_1 распознает множество ситуаций, из которых с некоторой частотой достижима цель F_2 .

3.3. Пусть теперь M_1 и M_2 —заданные множества неэквивалентных к. н. ф. языка $L(A^*)$, M —множество описаний ситуаций (в ПОУ^ш-позиций), полученных применением к ним M_1 . ФОС1 определим как ПРО1 из (1) с параметрами $\langle M, Y_1, \varphi_1, U_1, C_0, C_0 \rangle$, где Y_1 —некоторое подмножество абсолютных пар множеств (ПМ) в M , U_1 —инициально пустое множество входных записей, $\varphi \subseteq U_1 \times Y_1$, C_1 —элементарные вычисления, а C_0 —вопросы к оракулу.

ФОС2 аналогична ФОС1, однако параметр M заменяется на M_2 . По существу ФОС2 эквивалентна проблеме расшифровки булевых функций на основе вопросов к оракулу о том, являются ли элементы из M «единицами» или «нулями» искомых функций.

В свою очередь ФОС3 может иметь такие же параметры, как ФОС2, однако множеством входных записей должно быть заданное конечное множество $\langle F, l \rangle$ целей, а отношение φ по каждой цели $\langle F, l \rangle$ должно определять непустое множество оптимальных $\langle F, l \rangle$ образов.

ФОС3 инициально полно (1) и по существу является проблемой синтеза закономерностей специального типа. Если в ФОС1—2 основной информацией об искомых образах являются указания о принадлежности или нет отдельных заданных описаний ситуаций к образу, то в ФОС3 в исходную информацию дополнительно включается прин-

ции, по которому ситуации объединяются в один и тот же образ. А именно, их общий смысл, или процедура перехода от ситуаций образа к целевым.

Ниже принимается, что $M_2 = M_1$, а выбор M_1 заранее произведен.

3.4. Пусть эквивалентные проблемы ФОС1, 2 и 3 заданы, соответственно, параметрами $\langle M, Y_1, \varphi_1, U_1, C_1, C_0 \rangle$, $\langle M_1, Y_2, \varphi_2, U_2, C_1, C_0 \rangle$ и $\langle M_1, Y_2, \varphi_3, U_3, C_0, C_1 \rangle$, где M получено применением M_1 к множеству позиций P , $|M_1| = k$, $|M| = 2^k$, при произвольном $u \in U_i$, $i = 1, 2, 3$, мощности φ_i -образов и множества возможных решений $|T'_u|$ равны g_i и $\alpha_i |Y_i|$, соответственно. При вышеуказанных ограничениях из следствия 2.1 получаем следующее

Следствие 3.1. При переходе от ФОС1 к эквивалентной ей ФОС2 $\pi(\sigma)$ -сложность уменьшится, если отношение числа недопустимых решений для ФОС2 к числу недопустимых решений для ФОС1 будет меньше чем $2^k/2^{2^k}$.

Можно также утверждать об уменьшении $\pi(\sigma)$ -сложности при переходе от ФОС2 к эквивалентной и отличной только инициальной полнотой ФОС3, если принять высказанные выше допущения о возможности расширения теоремы 1 на инициально полные ПРО.

4.1. При поиске оптимальных представлений некоторой проблемы проверка условий эквивалентности может оказаться весьма трудной задачей, во многих случаях обусловленной универсальным характером задания этих условий. Представляет интерес выделение более специфических достаточных условий эквивалентности проблем конкретных типов. Ниже формулируется одно из таких условий для ФОС.

4.2. К. н. ф. E_1, E_2 —решения в ФОС2, 3 назовем эквивалентными, если множества ситуаций, выделяемых E_1 и E_2 , совпадают. Ниже предполагается, что известны критерии выбора из множеств эквивалентных к. н. ф. тех, которые являются решениями в рассматриваемой проблеме, в частности, оптимальными образами.

Справедлива следующая

Теорема 2. Для эквивалентности ФОС $_i$ $\langle M', Y', \varphi', U, C_0, C_1 \rangle$ и ФОС $_j$ $\langle M'', Y'', \varphi'', U, C_0, C_1 \rangle$, $i = 1, 2$, достаточно, чтобы (1) произвольный φ -образ в множестве решений—к. н. ф. вместе с каждой к. н. ф. содержал все ему эквивалентные и (2) для произвольного $u \in U$ множества классов ситуаций, выделяемых φ -образами $\varphi'(u)$ и $\varphi''(u)$, совпадали.

Теорема 2 сформулирована для случая совпадающих множеств входных записей исследуемых проблем. Однако ее нетрудно обобщить для произвольных множеств входных записей при дополнительном условии, что существует взаимно-однозначное соответствие между классами синонимов ФОС $_i$ и ФОС $_j$ и оно известно. Ясно, что при этом предположении теорема 2 будет справедлива и для ФОС3.

5.1. В ⁽³⁾ высказано предположение о том, что исчисление инвариантов $\bar{I}$ для исходного исчисления I „может оказаться“ по су-

щество „гораздо мощнее чем И, но иметь меньшую неопределенность“. Распознавание выводимости в исчислениях можно рассматривать, в частности, как процесс синтеза закономерностей вида „ $F_1 \Rightarrow F_2$ “, где F_1 —доказуемая, а F_2 —ранее доказанная формулы. В свою очередь ФОСЗ, как это уже отмечалось выше, по существу также совпадает с проблемой синтеза закономерностей. Исходя из этой связи, а также принимая, что „усиление“ в исчислениях соответствует уменьшению $\pi(\sigma)$ -сложности в ФОСЗ, интересно обнаружить вышеуказанный эффект „усиления“ при переходе от исходного исчисления к исчислению инвариантов посредством перехода от исходной ФОСЗ к некоторой другой ФОСЗ, удовлетворяющей требованиям, аналогичным требованиям к исчислению инвариантов.

Пусть $L_1 = \langle M_1^1, Y_3^1, \varphi_3^1, U_3^1, C_0, C_1 \rangle$ и $L_2 = \langle M_1^2, Y_3^2, \varphi_3^2, U_3^2, C_0, C_1 \rangle$ — проблемы типа ФОСЗ со следующими дополнительными к рассмотренным в п. 3.4 ограничениями: $|M_1^1| = |M_1^2|$, $U_3^1 = U_3^2 = U_3$, $r_3^1 = r_3^2 = r$, $\alpha_3^1 = \alpha_3^2 = \alpha$. Пусть также φ_3^1 и φ_3^2 определяют некоторые разбиения множеств входных и выходных записей, при которых все элементы произвольного φ -образа выделяют одно и то же для этого образа множество позиций; произвольный класс синонимов A в L_1 разбивается на $m > 1$ классов синонимов $a_1, \dots, a_m$ в L_2 , а соответствующий A класс позиций B — на классы $b_1, \dots, b_m$ в L_2 . Тем самым, если $u \in A$, а соответствующее u решение в L_1 выделяет множество позиций B , то это же множество позиций может быть выделено посредством решения L_2 для входных записей $u_1, \dots, u_m$, соответственно из $a_1, \dots, a_m$. Можно сказать, что каждый исследуемый класс позиций кодируется в L_2 посредством m кодов, вместо одного в L_1 . Именно в этом смысле отношение L_1 к L_2 можно считать аналогом отношения исчисления инвариантов к исходному.

Из указанных ограничений на L_1 и L_2 следует, что $|Y_3^2| = m|Y_3^1|$, откуда, допуская распространение оценки теоремы 1 на инициально полные ПРО, получаем, что $\pi(\sigma)$ -сложность L_1 меньше $\pi(\sigma)$ -сложности L_2 . Представляется естественным отнести это уменьшение за счет использования в L_1 знаний о том, что классы решений в L_2 в определенном смысле эквивалентны и потому могут рассматриваться совместно или что единичные решения в L_1 могут быть инвариантами для классов решений в L_2 . В то же время этот факт сам по себе не обеспечивает уменьшение $\pi(\sigma)$ -сложности. Используя ту же оценку теоремы 1, легко усмотреть возможность и противоположного эффекта при тех же условиях кодирования, но измененных параметрах $|M_1^2|$, r_3^2 , α_3^2 .

Автор признателен Г. Б. Маранджяну за полезные замечания по работе.

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного университета

Կոմբինատոր օպտիմիզացիան պարամետրերի և պատկերների
ձևավորման պրոբլեմների համեմատական անալիզի մասին

Հաստատված է որոշակի կապ նկարագրությունների ղեկողավորման
խնդիրալ դատարկ մուտքերով ենթադասի պրոբլեմների պարամետրերի և ժա-
մանակային բարդությունների գնահատականների միջև: Որպես հետևանք
ստացված են համեմատական բնութագրեր տրագիցիոն և օպտիմալ կոմբի-
նատոր ղեկավարման խնդրից բխած պատկերների ձևավորման պրոբլեմների
համար:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Э. М. Погосян, ДАН АрмССР, т. 68, № 1 (1979). ² Э. М. Погосян, ДАН АрмССР, т. 70, № 2 (1980). ³ С. Ю. Маслов, Кибернетика, № 2, 1979. ⁴ Э. М. Погосян, Тезисы Всесоюзной конференции «Методы математической логики в проблемах искусственного интеллекта», Паланга, 3—5 сентября, 1980.