УДК 513.013; 513.82

МАТЕМАТИКА

С. Х. Арутюнян

О геометрии симметрического пространства нуль-пар
 проективного пространства RP^n

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 22/VIII 1980)

В работе ⁽¹⁾ методами, изложенными в ^(2, 3), изучалась дифференциально-геометрическая структура, определяемая n -кратным интегралом, зависящим от n параметров, на многообразии двойного расщепления переменных интегрирования и параметров M . Было установлено, что такой интеграл индуцирует на многообразии M псевдориманову связность специального типа, которая оказывается соответствующей псевдоримановой метрике Рашевского ⁽⁴⁾. Здесь естественно возникает задача о выделении классов интегралов, определяющих на многообразии двойного расщепления переменных и параметров заданные геометрии Рашевского. Эта задача была решена для псевдоевклидовых пространств Рашевского (кривизна связности равна нулю). Оказалось, что соответствующие интегралы обнаруживают формальное сходство с классическими интегралами Лапласа—Фурье.

В настоящей работе последняя задача решается для некоторого класса простейших пространств—симметрических пространств Рашевского нуль-пар n -мерного вещественного проективного пространства RP^n . Отметим, что симметрические пространства Рашевского с простыми группами движений (к ним относится и упомянутое выше пространство) найдены А. С. Феденко ⁽⁵⁾. Одним из преимуществ этого пространства пар точек и гиперплоскостей в RP^n является то, что в отличие от обычного проективного пространства оно является метрическим. Более того, в пространства нуль-пар можно ввести проективно-инвариантную метрику, относительно которой они являются симметрическими пространствами (тензор кривизны ковариантно постоянен). Подробное изучение геометрии этих пространств было проведено Б. А. Розенфельдом ^(6, 7).

Рассмотрим структурные уравнения псевдориманова пространства Рашевского M ⁽¹⁾:

$$\begin{cases} d\omega^i = \omega_k^i \wedge \omega^k \\ d\omega_i = -\omega_i^k \wedge \omega_k \\ d\omega_k^i = \omega_p^i \wedge \omega_k^p + K_{kp}^{ir} \omega^p \wedge \omega_r \end{cases} \quad (1)$$

где величины K_{kp}^{ir} в совокупности (латинские индексы принимают значения $1, \dots, n$) образуют тензор кривизны пространства двойного расслоения M . Метрика на M задается однозначно определяемой n -кратным интегралом, зависящим от n параметров, билинейной невырожденной формой $d\varphi = \omega^i \wedge \omega_i$. Определим компоненты тензора кривизны формулой

$$K_{pq}^{ir} = K(\delta_p^i \delta_q^r + \delta_q^i \delta_p^r), \quad (2)$$

где δ_s^r — символ Кронекера, а K — некоторая гладкая функция. Дифференцированием последнего уравнения системы (1) с условием (2) легко можно доказать, что при $n > 1$

$$K = \text{const.}$$

Тензор Риччи при этом равен

$$K_p^i = (n+1) K \delta_p^i.$$

Будем интерпретировать структурные уравнения (1) с условием (2) в некотором проективном пространстве. Для этого нужно установить соответствие между базисными формами в соответствующих системах структурных уравнений. Более точно это означает следующее. Говорят ⁽⁸⁾, что два пространства аффинной связности изоморфны, если между ними можно установить точечное соответствие, при котором каждому выбору систем отнесения, связанных с точками первого пространства, можно сопоставить такой выбор систем отнесения, связанных с точками второго пространства, что главные и вторичные структурные формы первого пространства равны соответствующим формам второго пространства. Таким образом, ближайшая цель состоит в отыскании пространства, изоморфного пространству, определяемому структурными уравнениями (1) с условием (2).

Рассмотрим структурные уравнения n -мерного вещественного проективного пространства RP^n ⁽⁸⁾:

$$\begin{cases} d\theta_0^i = \theta_k^i \wedge \theta_0^k + \theta_0^i \wedge \theta_0^0 \\ d\theta_i^0 = \theta_k^0 \wedge \theta_i^k + \theta_0^0 \wedge \theta_i^0 \\ d\theta_k^i = \theta_p^i \wedge \theta_k^p + \theta_0^i \wedge \theta_k^0 \\ d\theta_0^0 = \theta_k^0 \wedge \theta_0^k \\ \theta_0^0 + \sum_{i=1}^n \theta_i^i = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Сравнивая системы структурных уравнений (1) и (3), нетрудно заметить, что искомое соответствие базисных форм можно определить формулами

$$\begin{cases} \omega^i = \mu \theta_0^i \\ \omega_l = \nu \theta_l^0 \\ \omega_k^l = \theta_k^l - z_k^l \theta_0^0 \end{cases}, \quad (4)$$

где величины μ и ν суть некоторые постоянные, удовлетворяющие соотношению

$$\mu \nu K = 1 \quad (5)$$

Уравнения инфинитезимального перемещения репера $\{e_0, e_1, \dots, e_n\}$ в проективном пространстве RP^n можно записать в виде

$$\begin{cases} de_0 = -\theta_0^k e_k - \theta_0^0 e_0 \\ de_l = -\theta_l^k e_k - \theta_l^0 e_0. \end{cases} \quad (6)$$

Рассмотрим в изучаемом проективном пространстве RP^n совокупность пар элементов: первым элементом пары является точка проективного пространства RP^n , а вторым элементом — гиперплоскость. Из соотношений (4) видно, что вполне интегрируемой системе пфаффовых уравнений $\omega^i = 0, i = 1, \dots, n$ отвечает система $\theta_0^i = 0, i = 1, \dots, n$, также вполне интегрируемая. Эта система определяет точку RP^n (соответствующую вектору e_0). Аналогично вполне интегрируема система уравнений $\theta_l^0 = 0, l = 1, \dots, n$, которая определяет в RP^n гиперплоскость (натянутую на векторы $e_1, \dots, e_n$). Таким образом, структурные уравнения (3) соответствуют пространству нуль-пар проективного пространства RP^n .

В (1) было показано, что n -кратный интеграл полубазовой формы

$$\Omega = \lambda \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^n,$$

зависящий от n параметров, задает на многообразии двойного расслоения переменных и параметров M структуру псевдориманова пространства Рашевского, если имеет место уравнение

$$d \ln \lambda + \sum_{i=1}^n \omega_i^l = \lambda^l \omega_l + \lambda_l \omega^l, \quad (*)$$

причем выполнено условие

$$d(\lambda^l \omega_l) = \omega^i \wedge \omega_i.$$

Нетрудно проверить, что эти соотношения будут выполнены, если величины λ^l и λ_l определить из дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} d\lambda^i - \lambda^h \omega_k^i = p \omega^i - \frac{K}{p} \lambda^l \lambda^k \omega_k \\ d\lambda_l + \lambda_h \omega_l^k = -\frac{K}{q} \lambda_l \lambda_k \omega^k + q \omega_l, \end{cases} \quad (7)$$

где величины p и q являются постоянными, удовлетворяющими условию

$$p - q = K(n + 1).$$

Тем самым система дифференциальных форм $\omega^i, \omega_k, \omega_k^i$, удовлетворяющих структурным уравнениям (1) с условием (2), и функций λ^i, λ_k ($i, k = 1, \dots, n$), удовлетворяющих дифференциальным уравнениям (7), замкнута. Таким образом, система уравнений (7) определяет семейство n -кратных интегралов, зависящих от n параметров и задающих на многообразии M структуру псевдориманова пространства Ращевского (1)–(2). Это семейство зависит от $2n + 1$ произвольных констант (начальных значений) $(\lambda^1)_0, \dots, (\lambda^n)_0, (\lambda_1)_0, \dots, (\lambda_n)_0, p$. Перейдем теперь к геометрической интерпретации. Зафиксируем в рассматриваемом пространстве нуль-пар некоторый элемент, т. е. точку и гиперплоскость исходного проективного пространства RP^n . Условие фиксации произвольной точки

$$e = x^i e_i + x^0 e_0 \quad (8)$$

проективного пространства можно представить в виде

$$de = ae. \quad (9)$$

Из соотношений (8), (9) легко можно получить дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют величины $x^1, \dots, x^n$:

$$dx^i - x^k (\theta_k^i - \delta_k^i \theta_0^0) = \theta_0^i - x^i x^k \theta_k^0.$$

Эти уравнения, равно как и нижеследующие дифференциальные уравнения инвариантности гиперплоскости пространства RP^n , впервые были указаны Г. Ф. Лаптевым (9).

Рассмотрим теперь в RP^n гиперплоскость

$$u_i x^i + u_0 x^0 = 0, \quad (10)$$

где через $u_1, \dots, u_n, u_0$ обозначены тангенциальные координаты этой гиперплоскости. Условие фиксации ее имеет вид

$$d(u_i x^i + u_0 x^0) = \beta(u_i x^i + u_0 x^0). \quad (11)$$

Отсюда нетрудно получить дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют величины $u_1, \dots, u_n$ (координата u_0 , как и x^0 , используется при нормировке репера). Вместе с уравнениями для $x^1, \dots, x^n$ получаем систему

$$\begin{cases} dx^i - x^k (\theta_k^i - \delta_k^i \theta_0^0) = \theta_0^i - x^i x^k \theta_k^0 \\ du_i + u_k (\theta_i^k - \delta_i^k \theta_0^0) = u_i u_k \theta_0^k - \theta_i^0. \end{cases} \quad (12)$$

Сравнение систем уравнений (12) и (7) показывает, что величины $\lambda^1, \dots, \lambda^n, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ можно связать с $x^1, \dots, x^n, u_1, \dots, u_n$ соотношениями

$$\begin{cases} \lambda^l = p x^l \\ \lambda_i = -q u_i \\ l = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Всякий интеграл, определяемый системой (7), задается числами p, q , $p - q = K(n + 1)$, точкой и гиперплоскостью в RP^n . В частности, точка и гиперплоскость могут быть инцидентны. Учитывая произвол, с которым интеграл присоединяется к невырожденной билинейной форме $d\varphi = \omega^l \wedge \omega_i$ (подынтегральная форма Ω определяется формой $d\varphi$ с точностью до замены вида $\Omega \rightarrow P(x^1, \dots, x^n)Q(y_1, \dots, y_n)\Omega$, где $x^1, \dots, x_n$ — переменные интегрирования, $y_1, \dots, y_n$ — параметры ⁽¹⁰⁾), определяющей на многообразии двойного расслоения M псевдориманову метрику Рашевского, получаем следующий результат.

Теорема. Каждое решение системы (7) задает интеграл, определяющий на многообразии двойного расслоения переменных и параметров M геометрию многообразия нуль-пар n -мерного проективного пространства RP^n . При данных постоянных p, q , удовлетворяющих условию $p - q = K(n + 1)$, множество решений системы (7) находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством пар „точка-гиперплоскость“ в RP^n . В частности, условие

$$\kappa_M = \frac{pq}{K}$$

выделяет решения, соответствующие которым точки и гиперплоскости инцидентны.

Чтобы установить справедливость последнего утверждения теоремы, достаточно выразить x^l и u_i через λ^l и λ_i и подставить в уравнение гиперплоскости.

Будем теперь искать явные выражения для интегралов, принадлежащих этим классам. Предварительно рассмотрим одномерный случай. Покажем, что семейство интегралов, порождающих геометрию многообразия пар совпадающих точек проективной прямой, определяется интегралом формы вида

$$\Omega = \frac{dx}{(x-y)^\gamma}, \quad \gamma = \text{const.} \quad (13)$$

Иначе говоря, любой интеграл семейства отличается от интеграла формы (13) только множителем вида $f(x)g(y)$.

При $n = 1$ основные структурные уравнения (1) в предположении (2) принимают вид

$$\begin{cases} d\omega^1 = \omega_1^1 \wedge \omega^1 \\ d\omega_1 = -\omega_1^1 \wedge \omega_1 \\ d\omega_1^1 = 2K\omega^1 \wedge \omega_1. \end{cases} \quad (14)$$

Заметим, что здесь величина K не обязана быть постоянной. Поэтому потребуем выполнения условия $K = \text{const}$. Нетрудно проверить, что формы $\omega^1, \omega_1, \omega_1^1$ можно определить соотношениями

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega^1 = \frac{ae^x}{x-y} dx \\ \omega_1 = \frac{be^{-x}}{x-y} dy \\ \omega_1^1 = dx + \frac{dx+dy}{x-y} \end{array} \right. ,$$

т. е. таким образом определенные формы удовлетворяют структурным уравнениям (1'). При этом имеет место равенство

$$abK = -1.$$

Основные уравнения (7) принимают вид:

$$\begin{aligned} d\lambda^1 - \lambda^1 \left(dx + \frac{dx+dy}{x-y} \right) &= ap \frac{e^x dx}{x-y} - \frac{bK}{p} (\lambda^1)^2 \frac{e^{-x} dy}{x-y}; \\ d\lambda_1 + \lambda_1 \left(dx + \frac{dx+dy}{x-y} \right) &= -\frac{aK}{q} (\lambda_1)^2 \frac{e^x dx}{x-y} + bq \frac{e^{-x} dy}{x-y}. \end{aligned}$$

Подставляя решение этой системы

$$\lambda^1 = -ape^x \frac{x-c_1}{y-c_1};$$

$$\lambda_1 = bq e^{-x} \frac{y-c}{x-c}$$

в уравнение (*), которому удовлетворяет подынтегральная функция λ , после простейших преобразований получим

$$d \ln \lambda + dx = \gamma \frac{dy}{y-c_1} + (\gamma-2) \frac{dx}{x-c} - (\gamma-1) \frac{dx}{x-y} - (\gamma-1) \frac{dy}{x-y},$$

где постоянная величина γ определена равенством

$$\gamma = 2 - abq.$$

Решение последнего уравнения имеет вид

$$\lambda = Ae^{-x} \frac{(y-c_1)^\gamma (x-c)^{\gamma-2}}{(x-y)^{\gamma-2}}, \quad A = \text{const.}$$

Таким образом, форма Ω определяется соотношением

$$\Omega = \bar{A} \frac{(y-c_1)^\gamma (x-c)^{\gamma-2}}{(x-y)^{\gamma-2}} dx, \quad \bar{A} = aA.$$

Интегралы, соответствующие парам совпадающих точек, получаются при условии $c_1 = c$. Выберем в качестве $\bar{A}$ величину $\bar{A} = c^{2-2\gamma}$ и устремим $c \rightarrow \infty$. Тогда, как легко видеть,

$$\Omega = \frac{dx}{(x-y)^\gamma}.$$

Таким образом, ядра интегралов, определяемых системой (7), обнаруживают формальное сходство с ядрами интегралов Коши.

Перейдем теперь к n -мерному случаю. Покажем, что геометрия пространства пар „точка-гиперплоскость“ (точка и гиперплоскость инцидентны) проективного пространства RP^n ($n > 1$) порождается на многообразии двойного расслоения M интегралом формы

$$\Omega = \frac{cdx^1 \wedge \dots \wedge dx^n}{(x^0 y_0 + x^1 y_1 + \dots + x^n y_n)^\gamma}, \quad \gamma = \text{const}, \quad c = \text{const}, \quad (14)$$

причем $x^0 = 1$, $y_n = 1$. Для этого достаточно показать, что компоненты тензора кривизны и метрического тензора расслоенного пространства Рашевского, соответствующего интегралу формы (14), связаны друг с другом зависимостью вида (2) (где в роли части компонент метрического тензора выступают символы Кронекера).

Пусть впредь латинские индексы пробегают значения $1, \dots, n$, а греческие — $0, 1, \dots, n-1$. Нетрудно показать⁽⁹⁾, что часть компонент метрического тензора пространства Рашевского, соответствующего интегралу формы $\Omega = \bar{K} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$, связана с коэффициентом $\bar{K}$ соотношением вида

$$g_i^\alpha = \frac{\partial^2 \ln \bar{K}}{\partial x^i \partial y_\alpha}.$$

В случае формы (14) получаем

$$g_i^\alpha = \frac{\gamma(x^\alpha y_i - S \delta_i^\alpha)}{S^2},$$

где обозначено

$$S = x^0 y_0 + x^1 y_1 + \dots + x^n y_n, \quad x^0 = 1, \quad y_n = 1.$$

Отсюда нетрудно получить ненулевые компоненты тензора кривизны

$$R_{ik}^{\alpha\beta} = \frac{g_i^\alpha g_k^\beta + g_i^\beta g_k^\alpha}{\gamma}.$$

Легко проверить, что ковариантная производная этого тензора равна нулю. Наконец, можно показать, что интеграл формы (14) принадлежит семейству, указанному в теореме, и соответствует случаю пар, в которых точка инцидентна гиперплоскости.

Выражаю глубокую благодарность профессору А. М. Васильеву за постановку задачи и внимательное отношение к работе.

RP^n պրոյեկտիվ տարածության զրո-զույգերի
սիմետրիկ տարածության երկրաչափության մասին

Հայտնի է, որ n պարամետրերից կախված n -պատիկ ինտեգրալին կարելի է ինվարիանտ ձևով, այսինքն՝ լոկալ կոորդինատական համակարգի ընտրությանից անկախ, միացնել հատուկ տեսքի աֆինական կապակցություն ինտեգրման փոփոխականների և պարամետրերի բազմաձևության վրա, այն է, Ռաշևսկու տարածության պսևդոհիմանյան կապակցություն: Այստեղ բլնականաբար առաջ է գալիս Ռաշևսկու տվյալ տարածության ստրուկտուրան առաջացնող ինտեգրալների դասի առանձնացման խնդիրը: Պսևդոէվկլիդյան տարածության դեպքում համապատասխան դասի ինտեգրալները ձևականորեն նման են Ֆուրյե-Հապլասի ինտեգրալներին: Սույն աշխատանքում վերը նշված խնդիրը լուծված է զրոյից տարբեր կորություն ունեցող տարածությունների պարզագույն դասերից մեկի՝ RP^n պրոյեկտիվ տարածության «կետ-հիպերհարթություն» զույգերի սիմետրիկ տարածության համար:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ С. Х. Арутюнян, ДАН АрмССР, т. 61, № 1 (1975). ² А. М. Васильев, Мат. сб., т. 70 (112), № 4 (1966). ³ А. М. Васильев, Дифференциальная алгебра как аппарат дифференциальной геометрии, Труды геометрического семинара, ВИНТИ, 1966. ⁴ А. С. Феденко, УМН, т. 12, № 3 (75) (1957). ⁵ Б. А. Розенфельд, Мат. сб., т. 24 (66), № 3 (1949). ⁶ Б. А. Розенфельд, Об унитарных и расслоенных пространствах, Труды семинара по векторному и тензорному анализу, т. 7 (1949). ⁷ Э. Картан, Пространства аффинной, проективной и конформной связности, Казань, 1962. ⁸ Г. Ф. Лаптев, Дифференциальная геометрия погруженных многообразий, Труды Моск. мат. о-ва, т. 2 (1953). ⁹ С. Х. Арутюнян, О геометрии n -кратных интегралов, зависящих от параметров, дис., Минск, 1977. ¹⁰ П. К. Рашевский, Скалярное поле в расслоенном пространстве, Труды семинара по векторному и тензорному анализу, т. 6 (1948).