ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXII 1981 3

УДК 519.68

МАТЕМАТИКА

А. Г. Тадевосян

О разрешимости проблемы построения полной системы примеров в одном классе программ

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 3/XII 1980)

Впервые задача построения полной системы примеров (ПСП) для проверки программ сформулирована в [1]. В [1−3] исследована проблема построения ПСП для различных систем команд условной машины, ориентированной на работу с файлами целых чисел. Примерами для программ такой машины являются массивы на внешних носителях, начальные же значения внутренних ячеек фиксированы.

В настоящей работе рассматриваются программы, не использующие внешних носителей. Примерами для таких программ являются начальные значения внутренних ячеек.

В [2] доказана разрешимость проблемы построения ПСП для программ, использующих односторонние счетчики с фиксированными начальными значениями. В настоящей работе доказывается разрешимость проблемы ПСП для программ, не использующих внешние носители, но использующих односторонние счетчики в качестве входных ячеек, т. е. программ, результаты работы которых могут зависеть от начальных значений счетчиков.

Пусть $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ — алфавит переменных, принимающих значения из множества Z целых чисел.

Программой P в базисе $\{f_1, f_2, \ldots, f_m, \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k\}$, где $f_1, f_2, \ldots, f_m$ всюду определенные целочисленные функции, а $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k$ — предикаты, называется ориентированный граф, вершины которого отмечены выражениями следующих трех типов:

1) $v_i := f_j(v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_l})$ — оператор присваивания (функциональная вершина);

2) $\pi_i(v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_l})$ — условный оператор (предикатная вершина);

3) СТОП — заключительная вершина.

Каждая вершина, кроме одной, выделенной в качестве начальной, имеет хотя бы одного предшественника, функциональная вершина имеет одного преемника, заключительная вершина не имеет преемников. Предикатные вершины имеют двух преемников, называемых И-преемником и Л-преемником. Дуги, ведущие из предикатной вершины в ε-преемник ($\varepsilon \in \{И, Л\}$), отмечаются ε.

Состоянием программы будем называть пару (S, U), где S—вершина, $U \in Z^n$. Если S—заключительная вершина, то состояние (S, U) называется заключительным.

Пусть $U=(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $U'=(u'_1, u'_2, \ldots, u'_n)$. Состояние (S', U') будем называть 1-достижимым из состояния (S, U), если выполняется одно из следующих двух условий:

1) S—функциональная вершина, отмеченная оператором $v_i := f_j(v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_t})$, S' является преемником S и $u'_l = u_l$ для $l \neq i$, $u'_i = f_j(u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_t})$;

2) S отмечена условным оператором $\pi(v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_t})$, S является $\pi(u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_t})$—преемником S и $U'=U$.

Путем в программе называется последовательность $S_1\varepsilon_1 S_2\varepsilon_2 \ldots \ldots S_k\varepsilon_k \ldots$, где все S_i—вершины и S_{i+1} является ε_i преемником S_i (считаем, что преемник функциональной вершины является ее И-преемником). Путь $S_1\varepsilon_1 S_2\varepsilon_2 \ldots S_k\varepsilon_k$ называется замкнутым, если S_1 является ε_k-преемником S_k. В дальнейшем при обозначении конечного пути отметки ε_i будут опускаться (за исключением случая, когда последней вершиной этого пути является предикатная вершина).

Вычислением по программе P над примером U_0 называется последовательность состояний (S_0, U_0), $(S_1, U_1), \ldots$, где S_0—вершина, отмеченная в качестве начальной, а каждое состояние начиная с (S_1, U_1) 1—достижимо из предыдущего. Если вычисление завершается (достигается некоторое заключительное состояние), то вычисление называется терминальным, а пример U_0—допустимым примером для программы P.

Путь, соответствующий вычислению над примером U, называется путем, активизируемым примером U. Путь, активизируемый некоторым допустимым примером, называется реализуемым. Дуга программы, принадлежащая реализуемому пути, называется реализуемой.

Конечное множество $\sum$ допустимых примеров для программы P называется полной системой примеров для программы P, если каждая реализуемая дуга программы P принадлежит пути, активизируемому некоторым примером из $\sum$.

Определим понятия условия выполнимости R_γ пути γ и преобразования памяти

$$r_\gamma = (r^{(1)}_\gamma(v_1, v_2, \ldots, v_n),\ r^{(2)}_\gamma(v_1, v_2, \ldots, v_n), \ldots, r^{(n)}_\gamma(v_1, v_2, \ldots, v_n))$$

при выполнении пути γ.

Пусть $\gamma = S_1 S_2 \ldots S_l$—путь в программе P. Обозначим γ_k начальный отрезок пути γ длиной k. Положим $R_{\gamma_0} = И$, $r_{\gamma_0} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Пусть определены выражения для R_{γ_k} и r_{γ_k}. Тогда, если S_{k+1} отмечена оператором присваивания $v_i := f_j(v_{j_1}, v_{j_2}, \ldots, v_{j_t})$, то $R_{\gamma_{k+1}} = R_{\gamma_k}$, $r^{(m)}_{\gamma_{k+1}} = r^{(m)}_{\gamma_k}$,

$m=1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$, $r^{(i)}_{\gamma_{k+1}}=f_j(r^{(j_1)}_{\gamma_k}(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, $r^{(j_2)}_{\gamma_k}(v_1, v_2, \ldots, v_n), \ldots, r^{(j_l)}_{\gamma_k}(v_1, v_2, \ldots, v_n))$. Если же S_{k+1} отмечена условным оператором $\pi_i(v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_l})$, то $r_{\gamma_{k+1}}=r_{\gamma_k}$.

$R_{\gamma_{k+1}}=R_{\gamma_k} \& \pi_i(r^{(i_1)}_{\gamma_k}(v_1, v_2, \ldots, v_n), r^{(i_2)}_{\gamma_k}(v_1, v_2, \ldots, v_n), \ldots, r^{(i_l)}_{\gamma_k}(v_1, v_2, \ldots, v_n))$,

если пути γ принадлежит дуга, исходящая из S_{k+1} и отмеченная И, и $R_{\gamma_{k+1}}=R_{\gamma_k} \& \urcorner \pi_i(r^{(i_1)}_{\gamma_k}(v_1, v_2, \ldots, v_n), r^{(i_2)}_{\gamma_k}(v_1, v_2, \ldots, v_n), \ldots, r^{(i_l)}_{\gamma_k}(v_1, v_2, \ldots, v_n))$, если пути γ принадлежит отмеченная Л дуга, исходящая из S_{k+1}.

Если S_l отмечена оператором СТОП, то $\gamma=S_1S_2 \ldots S_l$ и $r_{\gamma_l}=r_{\gamma_{l-1}}$, $R_{\gamma_l}=R_{\gamma_{l-1}}$.

Если путь $\gamma'=S'_1S'_2 \ldots S'_k\varepsilon'$ является продолжением пути $\gamma=S_1S_2 \ldots S_m\varepsilon$ (т. е. S'_1 является ε-преемником S_m), то $\gamma\gamma'$ будет обозначать путь $S_1S_2 \ldots S_mS'_1 \ldots S'_k\varepsilon'$. Для замкнутого пути γ обозначим $\gamma\gamma=\gamma^2$, $\gamma^n=\gamma^{n-1}\gamma$ $(n=3, 4, \ldots)$.

Непосредственно из определений вытекает следующая

Лемма 1. *Пример $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является допустимым для программы P тогда и только тогда, когда в P существует путь γ из начальной вершины в вершину, отмеченную оператором СТОП, такой, что*

$$R_\gamma(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\text{И}.$$

Обозначим K'_0 базис, все функции которого константы или тождественные функции; таким образом, операторы присваивания программ в базисе K'_0 являются операторами пересылки и засылки констант.

Для программ в базисе K'_0 число состояний, достижимых из некоторого фиксированного состояния, не превосходит $m \cdot n^n$, где m — число операторов программы, n — число ячеек и констант, используемых в программе. Таким образом, справедлива следующая

Теорема 1. *Реализуемый путь в программе в базисе K'_0 не может иметь длину, превосходящую $m \cdot n^n$.*

Обозначим K' базис, все функции которого константы или сложение с неотрицательной константой, а предикаты — сравнение с константой. Программу P в базисе K' назовем принадлежащей классу $\mathbf{P}'$, если все операторы присваивания в программе P имеют вид $r_i := r_i + C$ или $r_i := A$. Для произвольного пути γ программы P из класса $\mathbf{P}'$ условие выполнимости R_γ можно представить так: $R_\gamma=\mathop{\&}\limits_{i=1}^{n} R^{(i)}_\gamma$, где n — число ячеек, используемых в программе P, а каждое $R^{(i)}_\gamma$ — условие, связывающее ячейку v_i. Для класса $\mathbf{P}'$ программ возможны следующие выражения для $R^{(i)}_\gamma$:

1) $R^{(i)}_{\gamma} = \text{И}$;

2) $R^{(i)}_{\gamma} = \text{Л}$;

3) $R^{(i)}_{\gamma} = (v_i \leqslant A)$;

4) $R^{(i)}_{\gamma} = (v_i \geqslant B)$;

5) $R^{(i)}_{\gamma} = (B \leqslant v_i \leqslant A)$.

Каждое же $r^{(i)}_{\gamma}$ либо константа, либо выражение вида $v_i + C$, где $C \geqslant 0$.

Будем говорить, что в программе P ячейка v_i отмечается на пути α константой A, если $r^{(i)}_{\alpha}(v_i) = A$ или $R^{(i)}_{\alpha}(v_i) \supset (v_i \geqslant A)$.

Лемма 2. *Если ячейка v_i отмечается на пути α программы P некоторой константой, то для всякого замкнутого продолжения β пути α существует натуральное число n_β, такое, что $R^{(i)}_{\alpha\beta^{n_\beta+m}}(v_i) = R^{(i)}_{\alpha\beta^{n_\beta}}(v_i)$ для любого натурального числа m.*

Доказательство. а) Пусть $r^{(i)}_{\beta}(v_i) = v_i$, тогда $R^{(i)}_{\alpha\beta^{m+1}}(v_i) = R^{(i)}_{\alpha}(v_i) \& R_{\beta^{m+1}}(r^{(i)}_{\alpha}(v_i)) = R^{(i)}_{\alpha}(v_i) \& R^{(i)}_{\beta}(r^{(i)}_{\alpha}(v_i)) \& R^{(i)}_{\beta^m}(r^{(i)}_{\beta}(r^{(i)}_{\alpha}(v_i))) = R^{(i)}_{\alpha}(v_i) \& R^{(i)}_{\beta}(r^{(i)}_{\alpha}(v_i)) \& R^{(i)}_{\beta^m}(r^{(i)}_{\alpha}(v_i)) = R^{(i)}_{\alpha}(v_i) \& R^{(i)}_{\beta^m}(r^{(i)}_{\alpha}(v_i)) = R^{(i)}_{\alpha\beta^m}(v_i)$ для любого натурального m.

б) Пусть $r^{(i)}_{\beta}(v_i) = A$, тогда $r^{(i)}_{\beta^m}(v_i) = r^{(i)}_{\beta}(v_i) = A$, $R^{(i)}_{\beta^m}(A) = R^{(i)}_{\beta}(A)$, $R^{(i)}_{\alpha\beta^{m+1}}(v_i) = R^{(i)}_{\alpha}(v_i) \& R^{(i)}_{\beta}(r^{(i)}_{\alpha}(v_i)) \& R^{(i)}_{\beta^m}(r^{(i)}_{\beta}(r^{(i)}_{\alpha}(v_i))) = R^{(i)}_{\alpha}(v_i) \& R^{(i)}_{\beta}(r^{(i)}_{\alpha}(v_i)) \& R^{(i)}_{\beta}(A) = R^{(i)}_{\alpha\beta^2}(v_i)$ для любого натурального m.

в) Пусть $r^{(i)}_{\beta}(v_i) = v_i + M$, $M > 0$. Тогда

$$R^{(i)}_{\beta^n}(v_i) = R^{(i)}_{\beta}(v_i) \& R^{(i)}_{\beta}(v_i + M) \& \ldots \& R^{(i)}_{\beta}(v_i + (n-1) \cdot M).$$

Рассмотрим следующие 2 случая:

1) $r^{(i)}_{\alpha}(v_i) = A$. Пусть $\overline{A}$ — наибольшая константа, используемая в программе P. $R^{(i)}_{\alpha\beta^n}(v_i) = R^{(i)}_{\alpha}(v_i) \& R^{(i)}_{\beta^n}(r^{(i)}_{\alpha}(v_i)) = R^{(i)}_{\alpha}(v_i) \& \mathop{\&}\limits_{k=1}^{n} R^{(i)}_{\beta}(A + (k-1) \cdot M)$. При $n \geqslant n_\beta = \left[\dfrac{\overline{A} - A + M}{M}\right] + 1$, $A + (n-1) \cdot M > \overline{A}$, следовательно $\mathop{\&}\limits_{k=n_\beta}^{n_\beta+m} R^{(i)}_{\beta}(A + (k-1) \cdot M) = R^{(i)}_{\beta}(A + (n_\beta - 1) \cdot M$. Тогда $R^{(i)}_{\alpha\beta^{n_\beta+m}}(v_i) = R^{(i)}_{\alpha\beta^{n_\beta}}$ для любого натурального m.

2) $r^{(i)}_{\alpha}(v_i) = v_i + K$, тогда $R^{(i)}_{\alpha}(v_i) = (v_i \geqslant A) \& R'^{(i)}_{\alpha}(v_i)$, $R^{(i)}_{\alpha\beta^n}(v_i) = (v_i \geqslant A) \& R'^{(i)}_{\alpha}(v_i) \& \mathop{\&}\limits_{t=1}^{n} R^{(i)}_{\beta}(v_i + K + (t-1) \cdot M)$. Если $v_i \geqslant A$, то для $n \geqslant n_\beta = \left[\dfrac{\overline{A} - A - K + M}{M}\right] + 1$ $v_i + (n-1) \cdot M + K > \overline{A}$, следовательно $R^{(i)}_{\beta}(v_i + ((n_\beta + m) - 1) \cdot M + K) = R^{(i)}_{\beta}(v_i + (n_\beta - 1) \cdot M + K)$ и $R^{(i)}_{\alpha\beta^{n_\beta+m}}(v_i) =$

$=R^{(i)}_{\alpha\beta^{n}\beta}(v_i)$ для любого натурального m. Если же $v_i<A$, то $R^{(i)}_{\alpha}(v_i)=Л$, следовательно $R^{(i)}_{\alpha\beta^m}(v_i)=R^{(i)}_{\alpha}(v_i)$ для любого натурального m.

Лемма 3. *Пусть α, β, γ—пути в программе P, такие, что β—замкнутое продолжение α, γ—продолжение β, α и β не отмечают ячейку v_i. Тогда из совместности системы неравенств $R^{(i)}_{\beta\gamma}(v_i)$ следует существование натурального числа N_i, такого, что система неравенств $R^{(i)}_{\alpha\beta^n\gamma}(v_i)$ совместна при $n\geqslant N_i$.*

Доказательство. Так как β не отмечает v_i, то $R^{i}_{\beta}(v_i)$ либо неравенство вида $v_i\leqslant B$, либо $R^{(i)}_{\beta}(v_i)\equiv И$.

Пусть $r^{(i)}_{\alpha}(v_i)=v_i+K$, $r^{(i)}_{\beta}(v_i)=v_i+M$, $R^{(i)}_{\beta}(v_i)=(v_i\leqslant B)$, $R^{(i)}_{\gamma}(v_i)=(C\geqslant v_i\geqslant D)$; K, $M\geqslant 0$.

Если $R^{(i)}_{\alpha}(v_i)\equiv И$ и целое число X является решением системы неравенств $R^{(i)}_{\beta\gamma}(v_i)$, то $X-K-(n-1)\cdot M$ будет решением системы неравенств $R^{(i)}_{\alpha\beta^n\gamma}(v_i)$ для любого натурального числа n.

Рассмотрим теперь случай, когда $R^{(i)}_{\alpha}(v_i)=(v_i\leqslant A)$. Пусть X является решением системы $R^{(i)}_{\beta\gamma}(v_i)$, т. е. $X\leqslant B$, $C\geqslant X+M\geqslant D$. Положим $N_i=\left[\dfrac{X-K-A}{M}\right]+2$; тогда для любого $n\geqslant N_i$ выполняется неравенство $X-K-(n-1)\cdot M\leqslant A$. Выполнение системы неравенств $R^{(i)}_{\alpha\beta^n\gamma}(v_i)$ для $X-K-(n-1)\cdot M$ очевидно.

Для пути α программы P, использующей множество $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_m\}$ ячеек, обозначим U_α множество ячеек, отмечаемых на пути α.

Пусть α—путь, исходящий из начала программы, β—замкнутое продолжение α, γ—продолжение β, N_{v_i}—константа, существование которой доказывается для $v_i\in U_\alpha$ и $v_i\in V\setminus U_\alpha$ в леммах 2 и 3 соответственно.

Лемма 4. *Если путь $\alpha\beta^n\gamma$ реализуем для некоторого n, то существует k, такое, что $k\leqslant M=\max\limits_{v_i\in V} N_{v_i}$ и путь $\alpha\beta^k\gamma$ реализуем.*

Доказательство. Пусть для некоторого $n>M$ существует $V^0=\{v^0_1,\ldots,v^0_l\}\in Z^l$, такое, что $R_{\alpha\beta^n\gamma}(V^0)=И$,

$$R_{\alpha\beta^n\gamma}(V^0)=R_{\alpha\beta^n}(V^0)\&R_\gamma(r_{\alpha\beta^n})(V^0))=\mathop{\&}_{v_i\in U_{\alpha\beta}} R^{(i)}_{\alpha\beta^n}(v^0_i)\&\mathop{\&}_{v_i\in V\setminus U_{\alpha\beta}} R^{(i)}_{\alpha\beta^n}(v^0_i)\&$$

$$\& R_\gamma(r_{\alpha\beta^n}(V^0)).$$

По лемме 2 $\mathop{\&}\limits_{v_i\in U_{\alpha\beta}} R^{(i)}_{\alpha\beta^n}(v^0_i)=\mathop{\&}\limits_{v_i\in U_{\alpha\beta}} R^{(i)}_{\alpha\beta^M}(v^0_i)$.

Заметим, что для $v_i\in U_{\alpha\beta}$ $R^{(i)}_{\alpha\beta^n}(v^0_i)$ является тождественным условием.

По лемме 3 существует $V'=\{v'_1, v'_2,\ldots,v'_l\}\in Z^l$, такое, что $\mathop{\&}\limits_{v'_i\in V\setminus U_{\alpha\beta}} R_{\alpha\beta^M}(v'_i)=И$. Тогда $R_{\alpha\beta^M}(V')=И$.

Непосредственно из леммы 4 вытекает следующая

Теорема 2. *Проблема построения ПСП для программ в классе $\mathbf{P}'$ разрешима.*

Программу P назовем принадлежащей классу $\mathbf{P}'_1$, если множество V используемых в программе ячеек разбито на подмножества V_1 и V_2: $V=V_1\cup V_2$, $V_1\cap V_2=\varnothing$, над ячейками из V_1 в P выполняются операции и проверяются условия из базиса K'_0, а ячейки из V_2 используются только в операторах присваивания вида $v_i := C$, $v_i := v_i+k$ (k, $C\in Z$, $k\geq 0$) и в условных операторах сравнения ячейки с целой константой.

Теорема 3. *Проблема построения ПСП для программ в классе $\mathbf{P}'_1$ разрешима.*

Доказательство. Пусть β—замкнутое продолжение пути α, исходящего из начальной вершины программы $P\in\mathbf{P}'_1$; пусть, далее, в программе P m операторов, использующих k констант и ячеек из V_1. Тогда, согласно теоремам 1 и 2 для построения ПСП для всех путей вида $\alpha\beta^n\gamma$, достаточно построить ПСП для тех путей $\alpha\beta^n\gamma$, для которых

$$n\leqslant \max(M, m\cdot k^k),\ \text{где}\ M=\max_{v_i\in V_2} N_{v_i}.$$

Ереванский научно-исследовательский
институт математических машин

Ա. Գ. ԹԱԴԵՎՈՍՅԱՆ

Ծրագրերի մի դասի համար օրինակների լրիվ համակարգ կառուցելու պրոբլեմի լուծելիությունը

Դիտարկվում է ծրագրերի ստուգման համար օրինակների լրիվ համակարգ կառուցելու խնդիրը։

Ապացուցված է, որ այդ խնդիրը լուծելի է ծրագրերի $\mathbf{P}'$ դասում։ Այդ դասին պատկանող ծրագրերը բնորոշվում են հետևյալ հատկություններով.

1. Ծրագրի համար օրինակ է հանդիսանում ծրագրում օգտագործվող բջիջների սկզբնական արժեքների վեկտորը։

2. Ծրագրում օգտագործվող բոլոր բջիջների V բազմությունը տրոհվում է V_1 և V_2 բազմությունների։

3. V_1 բազմությանը պատկանող բջջին ծրագրում կարելի է 1 գումարել կամ՝ հաստատուն վերագրել։

4. V_2 բազմությանը պատկանող բջջին ծրագրում կարելի է վերագրել հաստատուն կամ՝ V_2 բազմությունից մեկ ուրիշ բջջի արժեք։

5. Բոլոր բջիջները կարելի է համեմատել հաստատունների հետ, իսկ V_2 բազմությանը պատկանող բջիջները՝ նաև միմյանց հետ։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Я. М. Барздинь, Я. Я. Бичевский, А. А. Калниньш*, в сб.: Учен. зап. Латв. гос. ун-та, т. 210, с. 152 (1974). [2] *А. А. Калниньш, Я. Я. Бичевский, Я. М. Барздинь*, в сб.: Учен. зап. Латв. гос. ун-та, т. 210. с. 188 (1974). [3] *Я. М. Барздинь, А. А. Калниньш*, в сб.: Учен. зап. Латв. гос. ун-та, т. 233, с. 123 (1975).