УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

С. М. Вартанян

Об одной задаче распознавания множеств

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 4/XI 1980)

Пусть $[n] \equiv \{1, 2, \dots, n\}$. Элемент $i \in [n]$ в дальнейшем будем обозначать через (i) . Пусть $S_1, S_2, \dots, S_m$ являются попарно различными подмножествами множества $[n]$.

Определение 1. Систему $S_1, S_2, \dots, S_m$ назовем распознающей, если любое подмножество $T \subseteq [n]$ можно распознать с помощью неупорядоченной последовательности чисел $\{|S_i \cap T|\}_{1 \leq i \leq m}$.

Определение 2. Кодом множества T в базисе $S_1, S_2, \dots, S_m$ назовем последовательность, которая получается в результате упорядочения неупорядоченной последовательности чисел $\{|S_i \cap T|\}_{1 \leq i \leq m}$ относительно порядка $\leq$.

Обозначим через $D(n)$ мощность минимальной (по мощности) распознающей системы.

Элементарным преобразованием над произвольной системой подмножеств множества $[n]$ назовем переименование элемента $(i) \in [n]$ на элемент $(j) \in [n]$ во всех подмножествах этой системы и наоборот.

Две системы назовем изоморфными, если одна из них получается из другой при помощи элементарных преобразований.

В книге ⁽¹⁾ поставлена следующая нерешенная

З а д а ч а: доказать или опровергнуть единственность (с точностью изоморфизма) минимальной распознающей системы.

Докажем сначала, что $D(n) = n$. При этом мы будем строить минимальную систему.

Рассмотрим следующие $n+1$ подмножества $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \dots, [n]$. Очевидно, что код множества $\{i\}$ в базисе $S_1, S_2, \dots, S_m$ представляет собой некоторый булевой вектор $(a_1, a_2, \dots, a_m)$, а количество булевых векторов длиной m , представляющих код, равно 2^m (подмножеству $T = \emptyset$ соответствует код $(0, 0, \dots, 0)$). Поскольку булевые коды $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ распознают рассмотренные подмножества, то $2^m \geq n+1$, т. е. $m > \log_2(n+1)$.

Рассмотрим следующую систему:

$$\begin{array}{l}
S_1 \quad 1 \\
S_2 \quad 1, 2 \\
S_3 \quad 1, 2, 3 \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
S_n \quad 1, 2, 3, \dots, n
\end{array}$$

Очевидно, что эта система распознает произвольное подмножество $T \subseteq [n]$, следовательно, $D(n) = n$.

Заметим, что между подмножествами $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}$ и булевыми векторами $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, представляющими код длиной n существует взаимно-однозначное соответствие. Не нарушая общности, можем предполагать, что соответствие между множествами и кодами имеет следующий вид

$$\left\{ \begin{array}{l}
(1, 1, 1, \dots, 1, 1) - \{n\} \\
(0, 1, 1, \dots, 1, 1) - \{n-1\} \\
(0, 0, 1, \dots, 1, 1) - \{n-2\} \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
(0, 0, 0, \dots, 0, 1) - \{1\} \\
(0, 0, 0, \dots, 0, 0) - \emptyset
\end{array} \right. \quad (*)$$

Из (*) следует, что элемент (i) содержится ровно в i множествах. Допустим, что система $S_1, S_2, \dots, S_n$ распознает все множества типа $\{i, j\}$, где $i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}$.

Для распознавания множеств типа $\{n, i\}$, где $1 \leq i \leq n-1$, используются все коды типа:

$$\underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_{n-i}, \underbrace{(2, 2, \dots, 2)}_i, \quad (1)$$

Мы показали, что (i) содержится ровно в i множествах, т. е. (n) содержится во всех множествах, $(n-1)$ содержится в $n-1$ множествах и, наконец, (1) — точно в одном множестве.

Докажем, что минимальная распознающая система единственна и имеет следующий вид:

$$\begin{array}{l}
S_1 \quad n, n-1, n-2, \dots, 3, 2, 1 \\
S_2 \quad n, n-1, n-2, \dots, 3, 2 \\
S_3 \quad n, n-1, n-2, \dots, 3 \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
S_{n-2} \quad n, n-1, n-2 \\
S_{n-1} \quad n, n-1 \\
S_n \quad n
\end{array}$$

Если $(n-2) \in S_n$, то множество $\{n-1, n-2\}$ не сможем распознать (код будет типа (1)), следовательно, $(n-2) \notin S_n$.

В общем случае, если $i > 1$, то аналогично $(i) \in S_n$. Легко уви-

деть, что и $(1) \notin S_n$, так как иначе множества $\{n-1, 1\}$ и $\{n\}$ имели бы одинаковый код. Следовательно, $S_n = \{n\}$.

Исключая элемент (n) из всех множеств, принадлежащих экстремальной системе, аналогичными рассуждениями можно убедиться, что $S_{n-1} = \{n-1\}$ и т. д.

Следовательно, минимальная распознающая система единственна с точностью изоморфизма.

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного
университета

Ս. Մ. ՎԱՐԴԱՆՅԱՆ

Բազմությունների ճանաչման մեկ խնդիր

Ներկա զեկույցում սահմանվում է բազմությունների հետ կապված որոշ կոդ և լուծվում այդ կոդերի միջոցով սկզբնական բազմությունների ճանաչման մեկ խնդիր: Ապացուցվում է էքստրեմալ ճանաչող համակարգի միակությունը:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ П. Эрдеш, Дж. Спенсер, Вероятностные методы в комбинаторике, Мир, М., 1976.