ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXII 1981 2

УДК 621.372.45

РАДИОФИЗИКА

К. А. Барсуков, Г. А. Григорян

Объемный резонатор с периодически движущейся границей

(Представлено академиком АН Армянской ССР Э. Г. Мирзабекяном 25/VI 1980)

Одномерный резонатор с периодически движущейся границей был рассмотрен в ([1]), однако используемый там метод не позволяет исследовать случай резонанса, когда энергия колебаний стенки эффективно передается полю. Для трехмерного резонатора условие резонанса оказывается иным, и в рамках метода ([1]) уже возможно исследование резонансного взаимодействия поля и стенки.

Пусть резонатор представляет собой, как и в ([2]), отрезок волновода, один из торцов которого покоится, а другой совершает колебания по закону

$$x = \overline{a}(\tau) = a + b\cos\frac{\Omega\tau}{c}, \tag{1}$$

где $\tau = ct$, a—характерное расстояние между торцами, b—амплитуда колебаний правого торца, Ω—частота колебаний движущегося торца. Условие резонанса можно получить из следующих простых соображений. Очевидно, что элементарная работа, совершаемая частью стенки ds за время dt, есть

$$dA = \frac{1}{4\pi c} H_\tau^2 b\Omega \sin\Omega t\, dt\, ds,$$

где H_τ—касательная к $x = a(\tau)$ и s—составляющая магнитного поля. Отсюда полная работа стенки за время Δt будет

$$A = \frac{b\Omega}{4\pi c}\int\limits_t^{t+\Delta t}\int\limits_s H_\tau^2\left(\left(a+b\cos\frac{\Omega\tau}{c}\right),\ \tau\right)\sin\Omega t\, dt\, ds. \tag{2}$$

Введем упрощающие предположения. Во-первых, будем считать колебания малыми, во-вторых, скорость колебаний нерелятивистской. Это означает, что

$$\frac{b}{a} \ll 1, \quad \frac{\Omega b}{c} \ll 1. \tag{3}$$

С точностью до величин первого порядка малости уравнение (2) запишется в виде

$$A = \frac{b\Omega}{4\pi c} \int\limits_{t}^{t+\Delta t} \int\limits_{s} H_{\tau}^{2}(a, \tau) \sin \Omega t \, dt \, ds. \tag{4}$$

Пусть собственная частота резонатора есть ω_{nm}, тогда квадрат магнитного поля осциллирует с частотой $2\omega_{nm}$. Интеграл (4), очевидно, растет со временем, если

$$\Omega = 2\omega_{nm}. \tag{5}$$

Последнее условие совпадает с условием резонанса ([3]). Частота резонатора ω_{nm} может быть записана соотношением ([4])

$$\omega_{nm} = c\sqrt{\lambda_n^2 + \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2}. \tag{6}$$

Подстановка (6) в (5) дает условие резонанса в виде

$$\Omega = 2c\sqrt{\lambda_n^2 + \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2}, \tag{7}$$

где λ_n—собственные числа поперечного сечения волновода. Отсюда видно, что если $\lambda_n \neq 0$, то $\Omega \neq \frac{2\pi mc}{a}$ и этот случай может быть рассмотрен методом ([1]).

Итак, рассмотрим для определенности колебания типа ТМ в указанном выше резонаторе, хотя метод позволяет исследовать также и колебания ТЕ типа. Функция $\bar{E}_z$ в этом случае удовлетворяет уравнению ([2])

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \lambda_n G(\xi, \eta)\right] \bar{E}_z = 0, \tag{8}$$

а для $G(\xi, \eta)$ из ([1]) имеем

$$G(\xi, \eta) = a^2 \left\{1 + 2\frac{b\Omega}{c}\cos\left(\frac{\Omega a}{c}\xi\right)\cos\left(\frac{\Omega a}{c}\eta\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\left(\frac{b\Omega}{c}\right)^2 \left[\cos\left(\frac{2\Omega a}{c}\xi\right) + \cos\left(\frac{2\Omega a}{c}\eta\right)\right]\right\}.$$

Ищем решение указанного уравнения в виде

$$\bar{E}_z = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(\xi)\cos(\pi k\eta), \tag{9}$$

которое, очевидно, удовлетворяет граничным условиям ([2]) задачи

$\partial \tilde{E}_z/\partial \eta = 0$ при $\eta = 0$ и $\eta = 1$. Разложим также $G(\xi, \eta)$ в уравнении (8) в ряд Фурье по той же системе функций

$$G(\xi, \eta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(\pi k \eta), \tag{10}$$

где

$$a_k = \frac{4b\Omega^2 a^3}{c^2} \cos\left(\frac{\Omega a}{c}\xi\right) \frac{(-1)^k \sin\frac{\Omega a}{c}}{\left(\frac{\Omega a}{c}\right)^2 - (\pi k)^2} - \frac{2b^2\Omega^2 a^3}{c^3} \frac{(-1)^k \sin\frac{\Omega a}{c}}{4\left(\frac{\Omega a}{c}\right)^2 - (\pi k)^2},$$

$$a_0 = 2a^2\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{b\Omega}{c}\right)^2 \cos\left(\frac{2\Omega a}{c}\xi\right)\right] + 4ab\cos\left(\frac{\Omega a}{c}\xi\right)\sin\frac{\Omega a}{c} +$$

$$+ \left(\frac{b\Omega}{c}\right)^2 \frac{ac}{2\Omega} \sin\frac{2\Omega a}{c}.$$

Если подставить (9) и (10) в (8) и использовать равенство $a_{-n} = a_n$, то получим

$$U_k'' + (\pi k)^2 U_k + \frac{1}{2}\lambda_n^2 \sum_{s=0}^{k} U_s a_{k-s}, \tag{11}$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots$. Таким образом, задача сводится к решению бесконечной системы дифференциальных уравнений для определения коэффициентов Фурье $U_k(\xi)$. Эта система весьма удобна для численного решения задачи на ЭВМ.

Заметим, что коэффициенты Фурье a_k убывают с ростом k как k^{-2}, ряд в (11) является знакопеременным. Если к тому же U_k достаточно быстро стремятся к нулю с ростом k, то можно рассмотреть приближение, в котором все $a_k = 0$ кроме a_0. Это фактически означает, что в (8) $G(\xi, \eta)$ заменяется его средним значением по переменной η на отрезке $[0,1]$. Кроме того, будем считать, что выполняется второе условие (3). Тогда (11) сведется к следующему уравнению:

$$\frac{d^2 U_k}{d\xi^2} + \omega_1(1 + \varkappa\cos(\Omega_1\xi))U_k = 0,$$

$$\omega_1 = \frac{a\omega_{nk}}{c}, \quad \Omega_1 = \frac{a\Omega}{c}, \quad \varkappa = \frac{2b\lambda_n^2 c^2}{a\omega_{nk}^2} \sin\frac{\Omega a}{c}. \tag{12}$$

Уравнение (12) есть уравнение Матье, достаточно хорошо изученное в математической литературе (см., например, ([5, 6])). Ниже для исследования решений (12) мы воспользуемся методом ([6]). Будем предполагать, что выполняется условие резонанса (5) и искать решение при $\Omega_1 = 2\omega_1$. По ([6]) представим искомое решение в виде

$$U_k = \alpha(\xi)\cos\left(\frac{\Omega_1}{2}\xi + \theta(\xi)\right). \tag{13}$$

В свою очередь $\alpha(\xi)$ и $\theta(\xi)$ ищутся через новые переменные по следующим формулам:

$$u = \alpha \cos \theta, \quad v = \alpha \sin \theta. \tag{14}$$

В ([6]) показывается, что для u и v имеют место соотношения

$$v = C_1 \frac{e^{\lambda\xi}}{\lambda}\left[-\frac{\varkappa\omega_1^2}{2\Omega_1} + \left(\omega_1 - \frac{\Omega_1}{2}\right)\right] + C_2 \frac{e^{-\lambda\xi}}{\lambda}\left[-\frac{\varkappa\omega_1^2}{2\Omega_1} - \left(\omega_1 - \frac{\Omega_1}{2}\right)\right], \tag{15}$$

$$u = C_1 e^{\lambda\xi} + C_2 e^{-\lambda\xi}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{\varkappa^2\omega_1^4}{4\Omega_1^2} - \left(\omega_1 - \frac{\Omega_1}{2}\right)^2}.$$

Переменные ξ и η ([1]) в нашей задаче при выполнении (3) связаны соотношениями

$$\eta = \frac{x}{a} - \frac{b}{a}\cos\frac{\Omega\tau}{c}\sin\frac{\Omega x}{c}, \quad \xi = \frac{\tau}{a} - \frac{b}{a}\sin\frac{\Omega\tau}{c}\cos\frac{\Omega x}{c}. \tag{16}$$

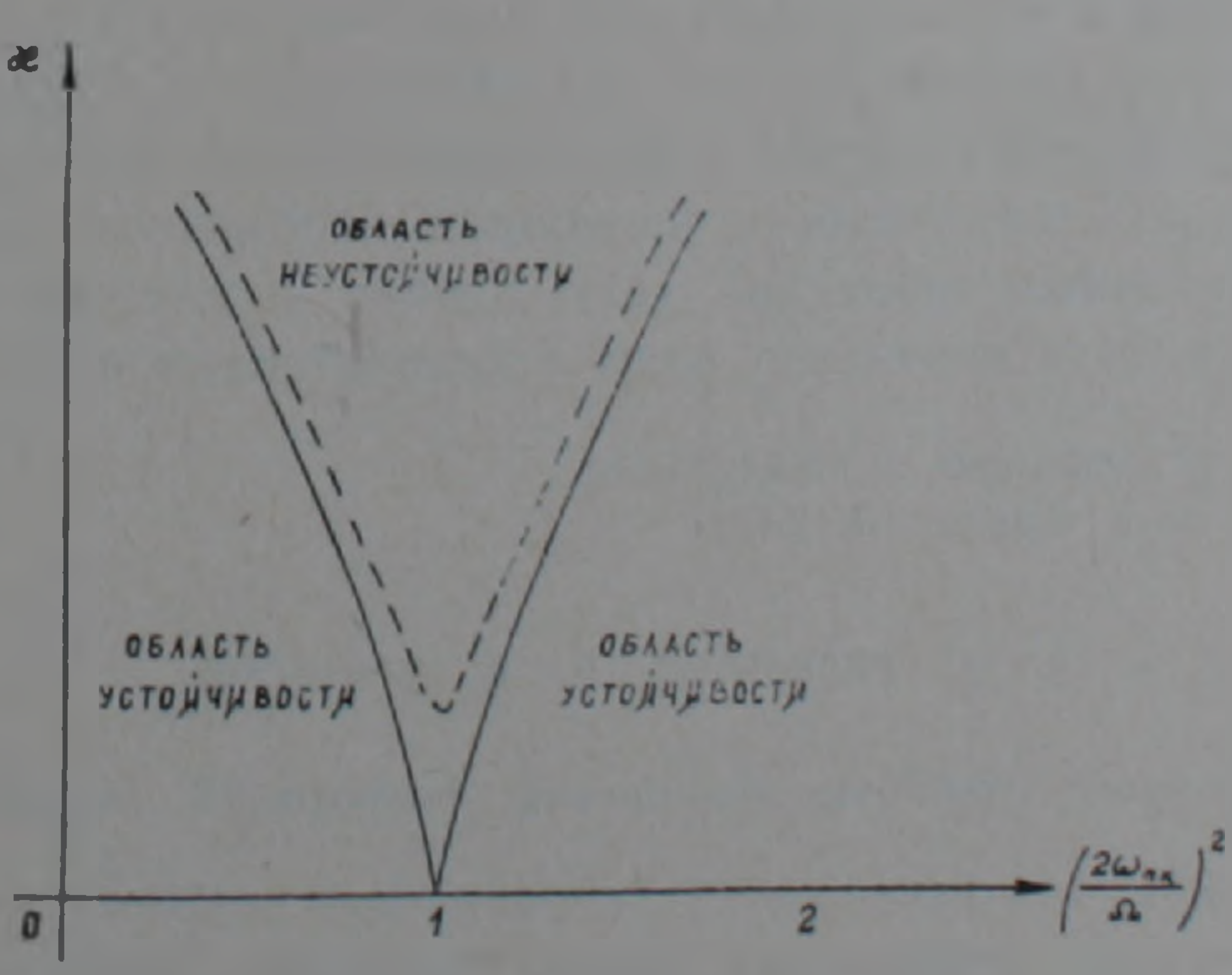
Если λ в (15) действительно, то с ростом ξ, а следовательно по (16) и τ, амплитуда $\alpha(\xi)$ будет возрастать по экспоненциальному закону. Действительные значения λ в (15) определяются соотношениями

$$2\omega_1\left(1 - \frac{\varkappa}{4}\right) < \Omega_1 < 2\omega_1\left(1 + \frac{\varkappa}{4}\right) \tag{17}$$

или с помощью (12)

$$2\omega_{nk} - \frac{b}{a}\,\frac{\lambda_n^2 c^2}{\omega_{nk}}\sin\frac{2a\omega_{nk}}{c} < \Omega < 2\omega_{nk} + \frac{b}{a}\,\frac{\lambda_n^2 c^2}{\omega_{nk}}\sin\frac{2a\omega_{nk}}{c}. \tag{18}$$

В этой области значений параметров амплитуда колебаний в резонаторе возрастает с течением времени экспоненциально (см. рисунок.



Области устойчивости колебаний резонатора сплошная линия). Резонанс такого типа естественно называть параметрическим.

Заметим, что (18) есть одновременно условие самовозбуждения колебаний в резонаторе с периодически колеблющейся стенкой. При $\Omega = 2\omega_{nk}\left(1 \pm \frac{\varkappa}{4}\right)$ или

$$\Omega = 2\omega_{nk} \pm \frac{b}{a}\,\frac{\lambda_n^2 c^2}{\omega_{nk}} \sin\frac{2a\omega_{nk}}{c} \tag{19}$$

колебания в резонаторе становятся чисто периодическими с периодом для основного типа колебаний равным $4\pi/\Omega$. Условия (19) являются границами областей, в которых колебания резонатора либо устойчивы, либо неустойчивы. Эти области изображены на рисунке в переменных $\varkappa$, $2\omega_{nk}/\Omega$.

При учете потерь в стенках, так же как и в диссипативных параметрических системах, область неустойчивости колебаний резонатора несколько меняется. Это можно подтвердить следующими полукачественными соображениями. Пусть движущаяся граница обладает импедансом ζ_0. Тогда (7) затухание колебаний в стационарном резонаторе определяется фактором $\exp\left\{-\frac{\zeta_0 \tau}{a}\right\}$. Поскольку ξ связано с x, τ соотношением (16), то в первом приближении $\xi = \frac{\tau}{a}$ и возможность нарастания колебаний в резонаторе определяется соотношением между ζ_0 и $\varkappa$. Ясно, что неустойчивость колебаний будет иметь место, если $\varkappa > \zeta_0$ или при

$$2\omega_1 - 2\sqrt{\frac{\varkappa^2\omega_1^2}{4} - \zeta_0^2} < \Omega < 2\omega_1 + 2\sqrt{\frac{\varkappa^2\omega_1^2}{4} - \zeta_0^2}.$$

Соответствующая область неустойчивости колебаний резонатора показана на рисунке пунктирной линией. Для создания режима возбуждения колебаний в этом случае необходима большая амплитуда колебаний резонатора. Естественно, что все приближение справедливо лишь для малых колебаний границы и при значительной величине импеданса стенки вопрос устойчивости колебаний необходимо решать с использованием точных уравнений (11), однако соответствующее исследование может быть проведено лишь с использованием ЭВМ.

Институт радиофизики и электроники
Академии наук Армянской ССР

Կ. Ա. ԲԱՐՍՈՒԿՈՎ, Գ. Ա. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

Պարբերաբար շարժվող սահմանով ծավալային ռեզոնատոր

Տեսականորեն հետազոտվում է պարբերական օրենքով շարժվող պատով ալիքատարային ռեզոնատորը՝ պատի և դաշտի միջև ռեզոնանսային *փոխազդեցության դեպքում, երբ շարժվող պատի էներգիան էֆեկտիվորեն հաղորդվում է դաշտին։ Գտնվել են խնդրի լուծումները և հայտնաբերվել այդ լուծումների կայունության տիրույթները։*

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *К. А. Барсуков, Г. А. Григорян*, Радиотехника и электроника, т. 21, вып. 1 (1976). [2] *Г. А. Григорян*, Изв. АН АрмССР, физика, т. 15, вып. 1, с. 59 (1980). [3] *Г. А. Аскарьян*, ЖЭТФ, т. 42, 1672 (1962). [4] *А. Н. Тихонов, А. А. Самарский*, Уравнения математической физики, «Наука», М., 1977. [5] *Г. Бейтмен, А. Эрдейи*, Высшие трансцендентные функции, «Наука», М., 1965. [6] *Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский*, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, «Наука», М., 1974. [7] *Г. А. Григорян*, Изв. АН АрмССР, физика, т. 15, вып. 1, с. 29 (1980).