ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXII 1981 2

УДК 532.546

ГИДРОМЕХАНИКА

Р. М. Барсегян

Основные уравнения многомерной фильтрации в деформируемых грунтах

(Представлено академиком АН СССР П. Я. Кочиной 10/VI 1980)

Дифференциальное уравнение двухмерной и трехмерной фильтрации в деформируемых грунтах выводим на основе учета изменений соотношений между фазами грунта в процессе фильтрации. Такой подход для одномерного движения впервые был изложен в работах [1-3].

Распространим идею об учете изменений соотношений между жидкой и твердой фазами грунта в процессе фильтрации на случай многомерной фильтрации. С этой целью вводим следующую гипотезу: деформация водонасыщенного грунта под действием внешней нагрузки происходит в основном по направлению действия силы и поэтому деформациями в других направлениях можно пренебречь.

Пусть направление действующей нагрузки совпадает с отрицательным направлением оси oz. Деформация грунта происходит только по оси oz.

Вывод основных уравнений фильтрации базируется на следующих зависимостях.

1. Закон Дарси—Герсеванова, учитывающий движение жидкости относительно движущегося скелета деформируемого грунта,

$$U_z-\varepsilon V_z=-K_z(H)\frac{\partial H}{\partial z}, \tag{1}$$

где U_z и V_z—проекции скорости соответственно воды и скелета на ось oz, ε—коэффициент пористости, $K_z(H)$—коэффициент фильтрации по направлению z, H—напор.

2. Закон Дарси:

$$U_x=-K_x(H)\frac{\partial H}{\partial x};$$
$$U_y=-K_y(H)\frac{\partial H}{\partial y}, \tag{2}$$

где U_x и U_y—компоненты скорости фильтрации по направлениям осей ox и oy, $K_x(H)$ и $K_y(H)$—коэффициенты фильтрации соответственно по осям ox и oy.

3. Уравнение неразрывности жидкой фазы, которое с учетом сжимаемости воды (по закону Гука) имеет вид

$$\frac{\partial(\gamma n)}{\partial t}+\frac{\partial(\gamma U_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\gamma U_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\gamma U_z)}{\partial z}=0, \tag{3}$$

где γ—объемный вес воды, n—пористость.

4. Уравнение неразрывности для твердой фазы

$$\frac{\partial V_z}{\partial z}+\frac{\partial m}{\partial t}=0; \qquad m+n=1. \tag{4}$$

5. Уравнение равновесия, учитывающее изменение соотношений между фазами грунта в любой момент времени [3],

$$q+r=q+\int\limits_{s(t)}^{z}\left(\gamma\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}+\frac{\gamma_s}{1+\varepsilon}\right)dz=\sigma+p, \tag{5}$$

где q—внешняя нагрузка, γ_s—удельный вес скелета, $s(t)$—осадка слоя деформируемого грунта конечной мощности в момент времени t, σ—напряжение в скелете, p—давление в воде, $r=\int\limits_{s(t)}^{z}\left(\gamma\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}+\frac{\gamma_s}{1+\varepsilon}\right)dz$ —вес водонасыщенного грунта в пределах призмы высотой z и с площадью основания, равной единице.

В теории фильтрационной консолидации грунтов Терцаги—Флорина [4] выражение r в (5) является постоянной величиной $r=\gamma_{нас}z$. Это обстоятельство не позволяет учитывать изменяемость характеристик грунта (пористость, мощность) в процессе фильтрации, тогда как рассмотрение величины r в интегральной форме в уравнении (5) учитывает изменение соотношений между фазами грунта в виде изменений параметров грунта в процессе фильтрации.

О необходимости рассмотрения величины r в интегральной форме свидетельствует следующая оценка:

$$\frac{r_n-r_k}{r_n}>\frac{s_\infty}{l}. \tag{6}$$

В (6) r_n и r_k—соответственно первоначальное и конечное значения веса r, s_∞—конечная осадка слоя грунта с мощностью l.

6. Компрессионная зависимость

$$\varepsilon=f(\sigma), \tag{7}$$

в частности для линейно-деформируемых сред

$$f(\sigma)=-a\sigma+\text{const},$$

где a—коэффициент уплотнения.

7. Зависимость напора и давления

$$H = \frac{1}{\gamma} p + z. \tag{8}$$

С помощью зависимостей (1)—(5), (7) и (8) обычным способом находим, что трехмерная фильтрация в деформируемом слое грунта под действием внешней нагрузки в общей постановке с учетом сжимаемости движущейся воды и переменной проницаемости слоя грунта описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = (1+\varepsilon)\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[K_x(H)\frac{\partial H}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[K_y(H)\frac{\partial H}{\partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[K_z(H)\frac{\partial H}{\partial z}\right]\right\} -$$

$$-\left[\frac{\gamma\varepsilon+\gamma_s}{1+\varepsilon} - \gamma\left(\frac{\partial H}{\partial z} - 1\right)\right]\frac{d\varepsilon}{d\sigma}\int\limits_{s(t)}^{z}\frac{\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}}{(1+\varepsilon)^2}dz + \frac{\varepsilon\gamma}{E_{\text{в}}}\frac{\partial H}{\partial t}; \tag{9}$$

$$q + \int\limits_{s(t)}^{z}\frac{\gamma\varepsilon+\gamma_s}{1+\varepsilon}dz = \sigma + p;$$

$$\varepsilon = f(\sigma); \quad H = \frac{1}{\gamma}p + z;$$

$E_{\text{в}}$—модуль объемного сжатия воды.

Из системы (9), в частности, для линейно-деформируемых сред получим следующее уравнение фильтрации в деформируемых грунтах:

$$\left(\frac{\varepsilon}{E_{\text{в}}} + a\right)\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{a}{\gamma}\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{1+\varepsilon}{\gamma}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[K_x(H)\frac{\partial H}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[K_y(H)\frac{\partial H}{\partial y}\right] +\right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial z}\left[K_z(H)\frac{\partial H}{\partial z}\right]\right\} + \frac{a(\gamma-\gamma_s)}{\gamma}\int\limits_{s(t)}^{z}\frac{1}{1+\varepsilon}\frac{\partial}{\partial z}\left[K_z(H)\frac{\partial H}{\partial z}\right]dz + \tag{10}$$

$$+ a\frac{s'(t)}{\gamma}\frac{\gamma\varepsilon[s(t);t]+\gamma_s}{1+\varepsilon[s(t);t]}.$$

При выводе уравнения (10) мы пренебрегли слагаемым $V_z(1+\varepsilon)\frac{\partial \varepsilon}{\partial z}$ по сравнению со слагаемым $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$, так как отношение этих членов для обычных случаев уплотнения грунтов равно 10^{-5}—10^{-8}, тогда как величины $\frac{\partial \varepsilon}{\partial z}$ и $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$ являются малыми величинами одного порядка ([4]).

Обычно коэффициент пористости ε в уравнениях фильтрационной консолидации осредняют. Вопрос о возможности такого осреднения исследован в ([3]). Для осредненного $\varepsilon_{\text{ср}}$ из (10) получим основное уравнение фильтрации в деформируемых грунтах

$$\gamma_i^* \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[K_x(H)\frac{\partial H}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[K_y(H)\frac{\partial H}{\partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[K_z(H)\frac{\partial H}{\partial z}\right] +$$

$$+ \gamma_{i1}\frac{\partial q}{\partial t} + \gamma_{i2}\left[K_z(H)\frac{\partial H}{\partial z}\right]\Bigg|_{s(t)}^{z} + \gamma_{i3}, \tag{11}$$

где

$$\gamma_i^* = \frac{\gamma}{1+\varepsilon_{\text{ср.}}}\left(\frac{\varepsilon_{\text{ср.}}}{E_{\text{В}}} + a\right); \quad \gamma_{i1} = \frac{a}{1+\varepsilon_{\text{ср.}}}; \quad \gamma_{i2} = \frac{a(\gamma-\gamma_s)}{(1+\varepsilon_{\text{ср.}})^2}$$

$$\gamma_{i3} = \frac{as'(t)(\gamma\varepsilon_{\text{ср.}}+\gamma_s)}{(1+\varepsilon_{\text{ср.}})^2}.$$

Осадка $s(t)$ в уравнениях (9)—(11) определяется как при одномерном движении с помощью известных формул механики грунтов.

При постоянном q и $K_x = K_y = K_z = K(H)$ из (11) следует уравнение

$$\gamma_i^* \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial H}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial H}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial H}{\partial z}\right) + \gamma_{i2}\left(K\frac{\partial H}{\partial z}\right)\Bigg|_{s(t)}^{z} + \gamma_{i3}. \tag{12}$$

Принимая в (12) $K = \text{const}$, получаем

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a^*\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2}\right) + \gamma_{i2} a^* \frac{\partial H}{\partial z}\Bigg|_{s(t)}^{z} + \frac{\gamma_{i3}}{\gamma_i^*}, \tag{13}$$

где a^*—коэффициент пьезопроводности $a^* = \frac{K}{\gamma_i^*}$.

Пренебрегая изменением z по отношению к t функции $\varepsilon(z, t)$ в выражении для r (относительная ошибка при этом будет меньше 10 %), вместо основных дифференциальных уравнений (9)—(13) получим более простые уравнения. Так, например, система уравнений (9) в этом случае примет вид (при $K_x = K_y = K_z = K(H)$)

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{E_{\text{В}}\frac{d\varepsilon}{d\sigma}}\right)\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{\gamma}\frac{\partial q}{\partial t} - \frac{1+\varepsilon(H) - |z-s(t)|\frac{\gamma-\gamma_s}{1+\varepsilon(H)}\frac{d\varepsilon}{d\sigma}}{\gamma\frac{d\varepsilon}{d\sigma}}\frac{\partial}{\partial z}\left[K(H)\frac{\partial H}{\partial z}\right] -$$

$$- \frac{1+\varepsilon(H)}{\gamma\frac{d\varepsilon}{d\sigma}}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[K(H)\frac{\partial H}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[K(H)\frac{\partial H}{\partial y}\right]\right\}. \tag{14}$$

Уравнение, соответствующее уравнению (10), будет иметь вид

$$\left(1+\frac{\varepsilon}{E_{\text{в}}a}\right)\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{1}{\gamma}\,\frac{\partial q}{\partial t}+\frac{1+\varepsilon(H)+[z-s(t)]\dfrac{\gamma-\gamma_s}{1+\varepsilon(H)}a}{\gamma a}\,\frac{\partial}{\partial z}\left[K(H)\,\frac{\partial H}{\partial z}\right]+$$

$$+\frac{1+\varepsilon(H)}{\gamma a}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[K\frac{\partial H}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[K\,\frac{\partial H}{\partial y}\right]\right\}. \tag{15}$$

Аналогичные относительно (11)—(13) уравнения соответственно имеют вид:

$$\eta^*\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[K_x(H)\,\frac{\partial H}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[K_y(H)\,\frac{\partial H}{\partial y}\right]+(1+\eta_4)\,\frac{\partial}{\partial z}\left[K_z(H)\,\frac{\partial H}{\partial z}\right]+$$

$$+\eta_1\,\frac{\partial q}{\partial t}; \tag{16}$$

$$\eta^*\,\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(K\,\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K\,\frac{\partial H}{\partial y}\right)+\,\frac{\partial}{\partial z}\left(K\,\frac{\partial H}{\partial z}\right)(1+\eta_4);$$

$$\frac{\partial H}{\partial t}=a^*\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right)+a_0^*\,\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}, \tag{17}$$

где

$$\eta_4=\frac{[z-s(t)](\gamma-\gamma_s)a}{(1+\varepsilon_{\text{ср.}})^2};\quad a_0^*=\frac{K\eta_4}{\eta^*}+a^*. \tag{18}$$

В зависимости от вида действующей внешней нагрузки движение жидкости может быть двухмерным (например, для равномерно распределенной по бесконечной полосе нагрузки). Двухмерные уравнения, соответствующие, например, уравнениям (17) и (18), будут соответственно иметь вид:

$$\eta^*\,\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(K\,\frac{\partial H}{\partial x}\right)+(1+\eta_4)\,\frac{\partial}{\partial z}\left(K\,\frac{\partial H}{\partial z}\right);$$

$$\frac{\partial H}{\partial t}=a^*\,\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+a_0^*\,\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}.$$

При осесимметричной фильтрации (например, случай действия местной нагрузки, равномерно распределенной по площади круга или по окружности) основные дифференциальные уравнения движения жидкости в деформируемых грунтах выводятся обычным способом.

Из полученных выше уравнений, в частности из (11)—(18), как частные случаи следуют уравнения фильтрационной консолидации грунтов и уравнения упругого режима фильтрации. В уравнении равновесия (5), принимая $r=\text{const}$, приходим к основным уравнениям фильтрационной консолидации (считая воду несжимаемой). При $r=r(t)$, считая грунт линейно-деформируемой средой, приходим к уравнениям упругого режима фильтрации. Таким образом, полученные новые уравнения являются более общими, нежели известные в настоящее время уравнения фильтрации.

Начальное условие для уравнений (11)—(18) заключается в том, что задается первоначальное значение напора в области движения. Это значение при учете сжимаемости воды равно нулю. Если же вода принимается несжимаемой, первоначальное значение напора определяется как решение уравнения Лапласа о мгновенном распределении напора для рассмотренной области, а граничные условия обычные. При учете сжимаемости воды граничное условие на поверхности действия силы при наличии дренажа должно быть третьего рода. На водонепроницаемых грунтах $\frac{\partial H}{\partial n^0}=0$ (n_0—нормаль к границе области).

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Ռ. Մ. ԲԱՐՍԵՂՅԱՆ

Բազմաչափ ֆիլտրացիայի հիմնական հավասարումները դեֆորմացիայի ենթարկվող գրունտներում

Աշխատանքում արտածվում են եռաչափ ֆիլտրացիայի հավասարումները դեֆորմացիայի ենթարկվող գրունտներում, հաշվի առնելով ֆիլտրացիայի ընթացքում հեղուկ և պինդ ֆազերի փոփոխությունը։ Ստացված հավասարումներից մասնավոր դեպքում հետևում են ֆիլտրացիոն կոնսոլիդացիայի և առաձգական ռեժիմի ֆիլտրացիայի այժմ գործող հավասարումները։ Նման հավասարումներ միաչափ ֆիլտրացիայի դեպքում նույնպես առաջին անգամ առաջարկվել է մեր կողմից ավելի շուտ։

Ինչպես ցույց են տալիս համեմատությունները, դեֆորմացիայի հաշվառումը ֆիլտրացիայի ընթացքում առանձնապես կարևոր է, եթե գրունտները լավ սեղմելի են։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Р. М. Барсегян*, ДАН СССР, т. 214, № 4 (1974). [2] *Р. М. Барсегян*, Межвузовский сб. науч трудов. Сер. XII, вып. V. Строительство и архитектура. Ереван (1978). [3] *Р. М. Барсегян*, Методы решения задач теории фильтрации в неоднородных средах. Изд-во Ереванского гос. ун-та, Ереван, 1977. [4] *В. А. Флорин*, Основы механики грунтов. Т. 2, Госстройиздат, Л.—М., 1961.