

УДК 539.1

МЕХАНИКА

А. А. Ванцян

Определение глубин проникания тонкого тела в металлы

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 7/VII 1980)

Рассматривается задача проникания тонкого твердого тела в металлы. Условия на поверхности тела T (рис. 1) состоят в равенстве нормальных скоростей среды и тела и касательных напряжений, выраженных по закону сухого трения. Уравнение поверхности тела можно взять в виде $r = r_k(x, t)$, t — время с начала проникания, x, r — осевая и радиальная координаты, r_k мало. На свободной поверхности среды $x=0$ имеются условия отсутствия напряжений. Решение упругой задачи получено в (1,2), где найдено, что вблизи поверхности тела следует учитывать неупругое поведение материала и ввести поверхность разрушения S , отделяющую область пластического течения от упругой области. Ввиду малости коэффициента трения для тонкого тела можно считать, что в основных порядках решение одномерно по r . Уравнение поверхности разрушения берется в виде $r = r_k \xi_0$, где $\xi_0 \cong \text{const}$, причем предположено $\xi_0 \gg 1$, но допускается, что $\xi_0 r_k$ мало, тогда можно для упругого решения вблизи S взять асимптотику для малых r , а для решения позади S пользоваться формулами, соответствующими переходу к большим значениям $\frac{r}{r_k}$, что соответствует

линейной асимптотике. Удовлетворение условий $x=0$ соответствует отраженным волнам, для которых σ_{rr} имеет порядок 1. Поэтому для рассматриваемого одномерного решения условие при $x=0$ не удовлетворяется. Область между поверхностями S и T описывается уравнениями Мизеса (3,4). Уравнение несжимаемости и граничные условия на теле дают при $r < r_k \xi_0$

$$v_r = \frac{r_k}{r} \frac{\partial r_k}{\partial t}, \quad (1.1)$$

где v_r — радиальная скорость. Отсюда находятся компоненты тензора скоростей деформации. В упругой области, вне поверхности S , решение можно искать методом источников в виде (1)

$$u_r = \frac{f(x, t)}{r}, \quad u_x \approx 0, \quad (1.2)$$

где $f(x, t)$ — функция, определяемая из граничных условий на поверхности S . Для напряжения в упругой среде имеет место

$$\sigma_{rr} = \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \text{и т. п.} \quad \Delta = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad (1.3)$$

тогда из (1.2) и (1.3) следует впереди S

$$\Delta \approx 0, \quad \sigma_{rr} = -2\mu \frac{f(x, t)}{r^2}, \quad \sigma_{\theta\theta} \approx 2\mu \frac{f(x, t)}{r^2}, \quad \sigma_{xx} = 0. \quad (1.4)$$

Подставляя упругое решение (1.4) в условие текучести

$$(\sigma_{rr} - \sigma_{xx})^2 + (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{xx})^2 + 6\tau_s^2 = 6\tau_s^2, \quad (1.5)$$

можно получить

$$\frac{2\mu f(x, t)}{r_k^2 \xi_0^2} = \tau_s. \quad (1.6)$$

Для выбора единственного решения следует взять уравнение энергии на фронте $r = r_k \xi_0$ или уравнение ударной адиабаты ⁽⁵⁾,

$$e_1 - e_2 = -(v_{r_1} - v_{r_2}) \frac{\sigma_{rr_1} + \sigma_{rr_2}}{2\rho_1 \xi_0 \frac{\partial r_k}{\partial t}}, \quad (1.7)$$

где e — энергия на единицу массы, индекс 1 дает величины впереди, а индекс 2 позади поверхности $r = r_k \xi_0$, значения $e_{1,2}$ имеют вид ⁽⁵⁾

$$e_1 = e_0(T_1) + 2\mu \frac{f^2(x, t)}{r_k^2 \xi_0^4}, \quad e_2 = e_0(T_2) + \epsilon_s + \frac{\tau_s^2}{2\mu}. \quad (1.8)$$

Используя соотношения (1.4), (1.7), (1.8), $\sigma_{rr_1} \approx \sigma_{rr_2}$ и предполагая постоянство выражения $\epsilon_s + cT_2 - cT_1 = e_1 - e_2$, можно найти

$$f(x, t) = \frac{ar_k^2}{2}, \quad \xi_0^2 = \frac{\mu a}{\tau_s}, \quad a = \frac{1}{1 + \frac{\mu}{\tau_s^2} (\epsilon_s + cT_2 - cT_1)}. \quad (1.9)$$

Для определения σ_{rr} в области течения можно использовать упрощенные уравнения движения

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, \quad \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = -2\tau_s, \quad (1.10)$$

откуда

$$\sigma_{rr} = 2\tau_s \ln r + \varphi(x, t), \quad (1.11)$$

где $\varphi(x, t)$ произвольная функция. Используя условие непрерывности σ_{rr} при $r = r_k \xi_0$ с учетом (1.4), (1.9), (1.11), получаем

$$\sigma_{rr} = \tau_s \left(2 \ln \frac{r}{r_k \xi_0} - 1 \right), \quad (1.12)$$

причем на теле при $r = r_k$

$$\sigma_{rr} = -\tau_s \left(\ln \frac{\mu a}{\tau_s} + 1 \right). \quad (1.13)$$

Рассмотрим цилиндрическую часть тела, которая переходит в криволинейный конус с уравнением образующей (рис. 1)

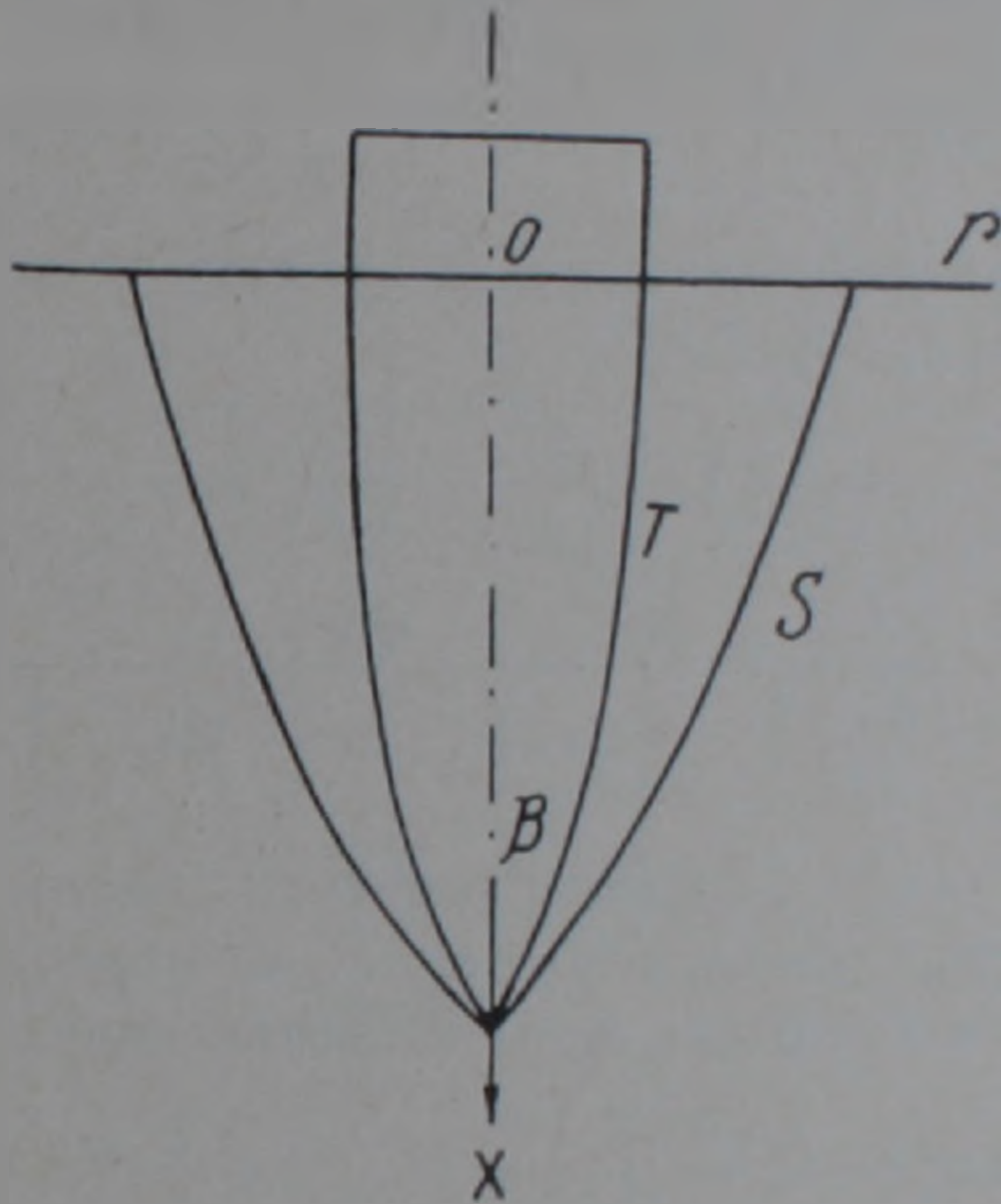


Рис. 1. Процесс проникания тонкого твердого тела в среду

$$r_k = r_0 - \beta(\zeta - \eta)^\nu, \quad \eta = f - x. \quad (2.1)$$

Для определения глубины проникания предполагалось, что для некоторых материалов трение между цилиндрической частью тела и средой отсутствует, а для других существует. Для задачи с отсутствием трения на цилиндрической части ($k_1 = 0$) уравнение движения будет при $f < \zeta$:

$$mf'' = -2\pi\tau_s \left(1 + \ln \frac{\mu a}{\tau_s} \right) \left[\frac{1}{2} \beta^2 \zeta^{2\nu} + \beta \zeta^\nu k_1 f - \frac{\beta k_1}{\nu+1} \zeta^{\nu+1} - \beta^2 \zeta^\nu (\zeta - f)^\nu + \frac{\beta^2}{2} (\zeta - f)^{2\nu} + \frac{\beta k_1}{\nu+1} (\zeta - f)^{\nu+1} \right]; \quad (2.2)$$

при $f > \zeta$:

$$mf'' = -2\pi\tau_s \left(1 + \ln \frac{\mu a}{\tau_s} \right) \left[\frac{\nu}{\nu+1} \beta k_1 \zeta^{\nu+1} + \frac{1}{2} \beta^2 \zeta^{2\nu} \right]. \quad (2.3)$$

Интегрируя уравнения (2.2) и (2.3) и складывая с учетом того, что при $f' = 0$ $f = f_{\max}$, для $f_{\max}$ получим

$$f_{\max} = \frac{1}{\frac{\nu}{\nu+1} \beta k_1 \zeta^{\nu+1} + \frac{1}{2} \beta^2 \zeta^{2\nu}} \left[\frac{m V^2}{4\pi\tau_s \left(1 + \ln \frac{\mu a}{\tau_s}\right)} - \beta^2 \frac{\zeta^{2\nu+1}}{(2\nu+1)(\nu+1)} - \frac{\beta k_1 \zeta^{\nu+2}}{2(\nu+2)} \right] + \zeta. \quad (2.4)$$

Вычислим $f_{\max}$ с учетом, что на цилиндрической части $k_1 \neq 0$. Для силы сопротивления будем иметь

$$P = 2\pi\tau_s \left(1 + \ln \frac{\mu a}{\tau_s}\right) \left[\frac{\nu}{\nu+1} \beta k_1 \zeta^{\nu+1} + \frac{1}{2} \beta^2 \zeta^{2\nu} + k_1 r_0 (f - \zeta) \right]. \quad (2.5)$$

Записав уравнения движения и проводя те же рассуждения, для $f_{\max}$ получим при $f_0 > f_{\max} > \zeta$

$$f_{\max} = -\left(\frac{\beta \zeta^\nu}{2k_1} - \frac{\zeta}{\nu+1}\right) + \left[\left(\frac{\beta \zeta^\nu}{2k_1} - \frac{\zeta}{\nu+1}\right)^2 + \frac{\beta}{k_1} \frac{3\nu+1}{(2\nu+1)(\nu+1)} \zeta^{\nu+1} - \frac{2\zeta^2}{(\nu+1)(\nu+2)} + \frac{m V^2}{2\pi\tau_s \left(1 + \ln \frac{\mu a}{\tau_s}\right) \beta k_1 \zeta^\nu} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.6)$$

где f_0 — высота тела, ζ — высота конусной части, τ_s — динамический предел текучести, μ — модуль сдвига, a определяется по формуле (1.9). При $f > f_0$ и $k_1 \neq 0$ для силы сопротивления получим

$$P = 2\pi\tau_s \left(1 + \ln \frac{\mu a}{\tau_s}\right) \left[\frac{\nu}{\nu+1} \beta k_1 \zeta^{\nu+1} + \frac{1}{2} \beta^2 \zeta^{2\nu} + k_1 r_0 (f_0 - \zeta) \right]. \quad (2.7)$$

Аналогичным способом для $f_{\max}$ можно получить

$$f_{\max} = f_0 + \frac{\frac{m V^2}{4\pi\tau_s \left(1 + \ln \frac{\mu a}{\tau_s}\right)} + \frac{(3\nu+1)\beta^2 \zeta^{2\nu+1}}{2(2\nu+1)(\nu+1)} - \frac{\beta k_1 \zeta^{\nu+2}}{(\nu+1)(\nu+2)} - \beta k_1 \zeta^\nu \left[\frac{f_0^2}{2} + \left(\frac{\beta \zeta^\nu}{2k_1} - \frac{\zeta}{\nu+1}\right) f_0 \right]}{\frac{\nu}{\nu+1} \beta k_1 \zeta^{\nu+1} + \frac{1}{2} \beta^2 \zeta^{2\nu} + k_1 r_0 (f - \zeta)} \quad (2.8)$$

Формулы (2.4), (2.6), (2.8) можно применять только после того, как будет установлено, равно или не равно нулю k_1 на цилиндрической части, что можно сделать с помощью эксперимента. Формулы (2.4), (2.6), (2.8) получены совместно с А. Г. Багдоевым.

Для экспериментального исследования проникания тонкого твердого тела в разные металлы были использованы в качестве материалов для образцов алюминий, дюраль, латунь, бронза, медь и чугун. В качестве проникающего тела использовалось тонкое твердое тело массой 9,6 г, с начальной скоростью 800 м/сек.

Результаты экспериментального исследования показали, что разные материалы ведут себя качественно по-разному. В тех материалах, в которых при проникании тела имеется касание цилиндрической части тела, для определения максимальной глубины проникания хорошее соответствие с экспериментом дают формулы (2.5), (2.7), для тех материалов, в которых имеет место неполное касание вдоль цилиндрической части тела, хорошее соответствие дает формула (2.4).

Рассмотрим проникание тонкого тела формы прямолинейного конуса, переходящего в цилиндр, имеющего массу m , начальную скорость V_0 , с полууглом вершины β , высотой конусной части ζ , радиусом цилиндрической части r_k (рис. 2).

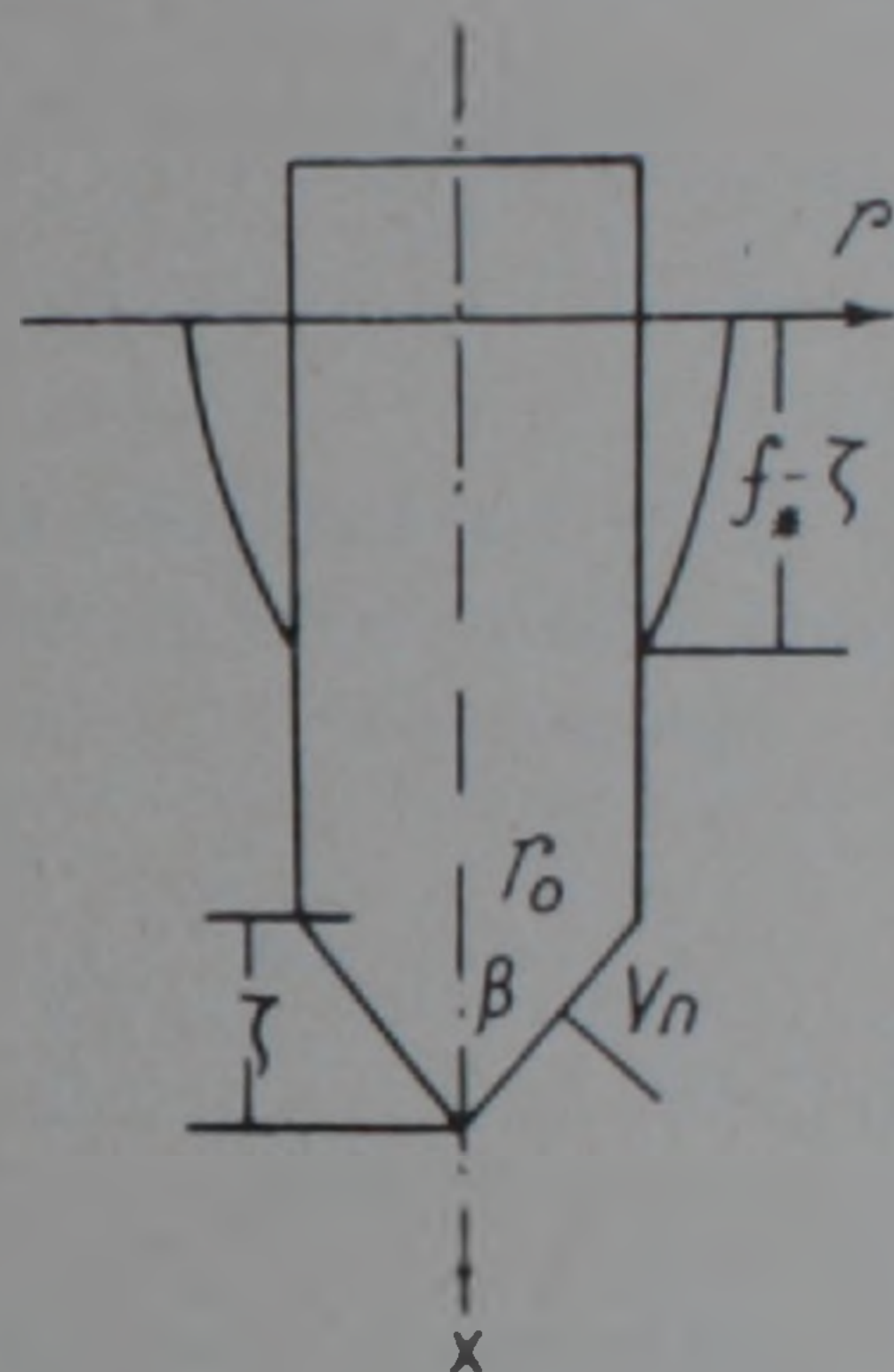


Рис. 2. Процесс прилегания среды к телу

При проникании тела частицы среды, прилегающие к поверхности конуса, движутся по нормали ⁽⁶⁾, следовательно, должны иметь скорость $V_n = V(t) \sin \beta$, где $V(t)$ — осевая скорость, зависящая от глубины проникания. Импульс тела передается частицам, окружающим коническую часть тела.

Вводя понятие средней скорости, с которой проходит тело глубину ζ в данный момент, можно определить время, за которое на частицу действует сила со стороны тела

$$t_1 \approx \frac{r_k}{V(t) \operatorname{tg} \beta}. \quad (3.1)$$

Записывая уравнение импульса

$$F = m \frac{dV(t)}{dt} \approx m \frac{V^2(t) \operatorname{tg} \beta}{r_k} \quad (3.2)$$

и деля на площадь конической поверхности тела, для компоненты напряжения в радиальном направлении получаем:

$$P = \frac{m V^2(t) \sin \beta \cos \beta}{\pi r_k^2} \quad (3.3)$$

Частицы среды будут двигаться в радиальном направлении до тех пор, пока будет выполняться условие $|P| > |\sigma_{rr}|$. Из условия $P = -\sigma_{rr}$ можно найти геометрическое место точек, где частицы будут находиться в уравновешенном состоянии, т. е.

$$\frac{m V^2(t) \sin \beta \cos \beta}{\pi r_k^2} = -\tau_s \left(2 \ln \frac{r_*}{r_{k0}} - 1 \right). \quad (3.4)$$

Из условия (3.4) можно определить радиус кратера

$$r_k^2 = \frac{m V^2(t) \sin^2 \beta}{2\pi\tau_s \left(\ln \frac{r_{k0}}{r_*} + \frac{1}{2} \right)}. \quad (3.5)$$

Если условие $P = -\sigma_{rr}$ будет выполняться на теле, т. е. при $r = r_k$, то среда начнет прилегать к телу. Из условия (3.4) можно определить ту скорость тела, при которой среда начинает прилипать к телу

$$V_*^2(t) = \frac{\pi r_k^3 \tau_s \left(\ln \frac{\mu a}{\tau_s} + 1 \right)}{m \sin^2 \beta}. \quad (3.6)$$

Скорость тела в момент полного погружения конуса можно определить из формулы

$$V_1^2 = V_0^2 - \frac{4\pi\tau_s}{m} \left[\frac{\beta^2}{2} \zeta^{2\nu+1} + \beta \zeta^{\nu+2} k_1 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\nu+1} \right) - \beta^2 \zeta^{2\nu+1} \frac{3\nu+1}{2(2\nu+1)(\nu+1)} + \frac{\nu \beta k_1 \zeta^{\nu+1}}{2(\nu+2)} \right]. \quad (3.7)$$

Если $V_* \geq V_1$, то за все время проникания будет существовать трение между цилиндрической частью тела и средой, а если $V_* < V_1$, то прилегание начнется на некоторой глубине.

При $f > \zeta$, $V_1 > V_*$ и из условия $f' = V_*$, $f = f_*$ будем иметь

$$\frac{V_*^2}{2} - \frac{V_1^2}{2} = -\frac{2\pi\tau_s}{m} \left(1 + \ln \frac{\mu a}{\tau_s} \right) \left(\frac{\nu}{\nu+1} \beta k_1 \zeta^{\nu+1} + \frac{1}{2} \beta^2 \zeta^{2\nu} \right) (f_* - \zeta). \quad (3.8)$$

После достижения скорости V_* для силы сопротивления будем иметь

$$P' = 2\pi\tau_s \left(1 + \ln \frac{\mu a}{\tau_s} \right) \left[\frac{\nu}{\nu+1} \beta k_1 \zeta^{\nu+1} + \frac{1}{2} \beta^2 \zeta^{2\nu} + k_1 r_0 (f - f_*) \right]. \quad (3.9)$$

Записывая уравнение движения $P' = -mf''$ и интегрируя от f_* до f , получаем

$$\frac{f'^2}{2} - \frac{V^2}{2} = - \frac{2\pi\tau_s}{m} \left(1 + \ln \frac{\mu a}{\tau_s} \right) \left[\left(\frac{\nu}{\nu+1} \beta k_1 \tau_s^{\nu+1} + \frac{1}{2} \beta^2 \tau_s^{2\nu} \right) (f-f_*) + k_1 r_0 \frac{(f-f_*)^2}{2} \right] \quad (3.10)$$

при $f' = 0$ $f = f_{\max}$; для $f_{\max}$ получим

$$f_{\max} = f_* - \left(\frac{\nu}{\nu+1} \tau_s + \frac{r_0}{2k_1} \right) + \left[\left(\frac{\nu}{\nu+1} \tau_s + \frac{r_0}{2k_1} \right)^2 + \frac{m V^2}{2\pi\tau_s \left(1 + \ln \frac{\mu a}{\tau_s} \right) k_1 r_0} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.11)$$

где f_* определяется из (3.8).

Таким образом, задача разлагается на две стадии: первая стадия—без трения на цилиндрической части до достижения скорости V_* и при глубине f_* и вторая — при наличии трения на цилиндрической части до полной остановки с глубиной $f_{\max} - f_*$.

В таблице приведены значения характерных величин.

Теоретические и экспериментальные данные

Материал	$f_{\max}$ по (2.4)	$f_{\max}$ по (3.11)	$f_{\max}$ по (2.6)	$f_{\max}$ эксп., см	α	ξ эксп.	$\frac{\mu}{\times 10^4}$ $\frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$	$\frac{\tau_s}{\text{кг}} \cdot 10^4$ $\frac{\text{см}^2}{\text{см}^2}$	k_1	r_0 см
Дюраль	4,45	3,9	4,28	4,5	0,65	7	26	3000	0,15	0,46
Бронза	5,9	5,7	3,59	2,0	0,16	10	63	9705	0,30	0,60
Латунь	3,82	2,8	2,19	2,2	0,54	9	44	2912	0,25	0,45
Медь	3,14	3,1	2,72	3,0	0,48	9	44	2206	0,23	0,48
Алюминий	14,4	14	10,5	10	0,20	10	26	441	0,15	0,6
Чугун	2,90	1,9	1,89	2,1			28	9900	0,25	2,0

Формула (3.11) дает возможность определить глубину проникания теоретически.

Автор выражает свою благодарность А. Г. Багдоеву за постановку задачи и ценные советы.

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Ա. Ա. ՎԱՆՅԱՆ

Մետաղներում բարակ մարմնի ներթափանցման խորությունների որոշումը

Դիտարկվում է բարակ պինդ մարմինների ներթափանցումը մետաղների մեջ: Ենթադրելով, որ քայքայման ճակատի ետևում տեղի ունի պլաստիկ հոսունություն, անսեղմելիության հավասարումից, քայքայման ճակատի վրա

և դաժ պայմաններից, միացնելով հարվածային աղիաբաղի և միջավայրի շարժման հավասարումները, որոշված են մասնիկների արագությունները և լարումները մարմնի մոտ:

Դիտնված է կոնից և գլանից բաղկացած մարմնի ներթափանցման առավելագույն խորություն արժեքը: Կատարված են փորձեր տարբեր մետաղներում ներթափանցման վերաբերյալ: Ճշտված է առավելագույն խորության որոշման համար ստացված բանաձևերի կիրառման տիրույթը: Ստացված է նոր բանաձև:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

¹ А. Г. Багдоев, Изв. АН АрмССР, Механика, т. 30, № 5 (1977). ² А. Г. Багдоев, А. Н. Мартиросян, Г. А. Саркисян, Изв. АН СССР, МТТ, № 3, 1978. ³ А. А. Ильющин, Пластичность, ОГИЗ, ГИТТЛ, 1948. ⁴ В. Ольшак, З. Мрус, П. Пежина, Современное состояние теории пластичности. Мир, М., 1964. ⁵ С. С. Григорян, ПММ, т. 31, № 4 (1964). ⁶ А. Я. Сагомонян, Проникание, Изд-во МГУ, 1974