ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXII 1981 2

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

Ж. Г. Никогосян

О максимальном цикле графа

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 18/IX 1980)

Рассматриваются конечные неориентированные графы без петель и кратных ребер. Все понятия и обозначения, не определяемые здесь, можно найти в книге Харари [1]. Для любого подграфа L графа G через $V(L)$ и $X(L)$ будем обозначать соответственно множество вершин и множество ребер подграфа L. Первый и последний элементы любой конечной последовательности l обозначаются через $F(l)$ и $L(l)$ соответственно. Пусть $\alpha(G)$ обозначает число вершинной независимости графа G, $\delta(G)$—минимальную степень, $k(G)$—вершинную связность, $h(G)$—максимальную длину простых циклов графа G и $N(v)$—множество вершин, смежных с вершиной $v\in V(G)$.

Дирак [2] доказал, что если в графе G имеет место $\delta(G)\geqslant v(G)/2$, где $v(G)=|V(G)|$, то G—гамильтонов, т. е. $h(G)=v(G)$. В работе [2] доказано также, что если $\delta(G)\leqslant v(G)/2$ и $k(G)\geqslant 2$, то $h(G)\geqslant 2\delta(G)$.

Нэш-Вильямс [3] доказал, что если 2-связный граф G удовлетворяет условиям $\delta(G)\geqslant(v(G)+2)/3$, $\delta(G)\geqslant\alpha(G)$, то $h(G)=v(G)$.

П. Эрдёш и В. Хватал [4] доказали гамильтоновость графа G при условии $\alpha(G)\leqslant k(G)$.

В настоящем сообщении приводятся следующие результаты.

Теорема 1. *Если 2-связный граф G удовлетворяет условию $\delta(G)\geqslant(v(G)+k(G))/3$, то $h(G)=v(G)$.*

Теорема 2. *Если 3-связный граф G удовлетворяет условию $\delta(G)\leqslant(v(G)+k(G))/3$, то $h(G)\geqslant 3\delta(G)-k(G)$.*

Рассмотрим произвольный 2-связный граф G, для которого $S=\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ является некоторым разделяющим множеством вершин. Компоненты связности графа $G-S$ обозначим через $G_1, G_2, \ldots, G_l$.

Пару цепей Q, R графа G назовем S-допустимой, если

$$\{F(Q), L(R)\}\subseteq V(H_i),\ \{L(Q), F(R)\}\subseteq S,\ V(Q)\cap V(R)=\varnothing,$$

$$V^* \subseteq V(H_\varepsilon) \cup S, \quad N(F(Q)) \cup N(L(R)) \subseteq V^* \cup S,$$

где

$$H_1 = \bigcup_{i=1}^{f} G_i, \quad H_2 = \bigcup_{i=f+1}^{t} G_i, \quad f \in \{1, 2, \ldots, t-1\},$$

$$\varepsilon \in \{1, 2\}, \quad V^* = V(Q) \cup V(R).$$

Для S-допустимой пары Q, R введем обозначения

$$d_1 = |N(F(Q)) \cap V^*|, \quad d_2 = |N(L(R)) \cap V^*|.$$

Для произвольной простой цепи l и для произвольных вершин $u, v \in V(l)$ через $[u, v] \dagger l$ будем обозначать подцепь цепи l, соединяющую вершины u и v.

Доказательства теорем 1 и 2 опираются на следующие леммы:

Лемма 1. *Если для S-допустимой пары цепей Q, R графа G имеет место $d_1 + d_2 \geqslant |V^*| + 1$, то существует цепь $P = l$, удовлетворяющая условию*

$$F(P) = L(Q), \ L(P) = F(R), \ V(P) = V^*. \tag{1}$$

Лемма 2. *Если для S-допустимой пары цепей Q, R графа G имеет место $|V^* \cap S| = \Delta \geqslant 3$, то либо существует цепь $P = l_1$, удовлетворяющая условию* (1), *либо существует цепь $P = l_2$, удовлетворяющая условию*

$$\left.\begin{array}{l} F(P) = L(Q), \ L(P) = F(R), \ V(P) \subseteq V(H_\varepsilon) \cup S, \\ V(P) \cap S \subseteq V^* \cap S, \ |V(P)| \geqslant d_1 + d_2 - 1, \end{array}\right\} \tag{2}$$

либо существует цепь $P = l_3$, удовлетворяющая условию

$$\left.\begin{array}{l} F(P) \in S, \ L(P) \in S, \ V(P) \subseteq V(H_\varepsilon) \cup S, \\ V(P) \cap S \subseteq V^* \cap S, \ |V(P)| \geqslant d_1 + d_2. \end{array}\right\} \tag{3}$$

Если же для S-допустимой пары Q, R имеет место $\Delta = 2$, то либо существует цепь $P = l_4$, удовлетворяющая хотя бы одному из условий (1), (2), *либо для любой вершины $z \in S$, отличной от $L(Q)$ и $F(R)$, существует цепь $P = l_5$, удовлетворяющая условию*

$$\left.\begin{array}{l} F(P) \in S, \ L(P) \in S, \ V(P) \subseteq V(H_\varepsilon) \cup S, \\ V(P) \cap S \subseteq \{L(Q), F(R), z\}, \ |V(P)| \geqslant d_1 + d_2 + 1. \end{array}\right\} \tag{4}$$

Лемма 3. *Для S-допустимой пары цепей Q, R либо существует цепь $P = l_1$, удовлетворяющая хотя бы одному из условий* (1), (2), *либо существует цепь $P = l_2$, удовлетворяющая условию*

$$\left.\begin{array}{l} F(P) = L(Q), \ L(P) = F(R), \ V(P) \subseteq V(H_\varepsilon) \cup S, \\ V(P) \cap S \subseteq V^* \cap S, \ |V(P)| \geqslant \min(d_1, d_2) + \Delta - 1. \end{array}\right\} \tag{5}$$

Теорема 2 доказывается конструктивным путем в том предположении, что в графе G нам известно некоторое разделяющее множество $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$. Приводим лишь набросок доказательства теоремы 2.

Пусть $v(G) = v$, $\delta(G) = \delta$, $k(G) = k$, $h(G) = h$ и пусть $G_1, G_2, \ldots, G_t$ — компоненты связности графа $G - S$. Введем обозначения

$$H_1 = \bigcup_{i=1}^{t-1} G_i, \quad H_2 = G_t.$$

Без потери общности можем предполагать, что $|V(H_2)| \leqslant |V(H_1)|$.

Случай 1. $|V(H_1)| \geqslant 2\delta - k - 1$.

Пусть простая цепь $W = P_1$ удовлетворяет следующим условиям:

а1) $F(W) \in S$, $L(W) \in S$, $V(W) \subseteq V(H_1) \cup S$;

а2) если цепь $W = P$ удовлетворяет условию а1), то

$$|V(P) \cap S| \leqslant |V(P_1) \cap S|;$$

а3) если цепь $W = P$ удовлетворяет условиям а1), а2), то

$$|\{i / V(P) \cap V(G_i) \neq \varnothing\}| \leqslant |\{i / V(P_1) \cap V(G_i) \neq \varnothing\}|;$$

а4) если цепь $W = P$ удовлетворяет условиям а1)—а3), то

$$|V(P)| \leqslant |V(P_1)|.$$

Если для некоторого числа $i \in \{1, 2, \ldots, t-1\}$ имеет место

$$V(P_1) \cap V(G_i) \neq \varnothing, \ V(G_i) \setminus V(P_1) \neq \varnothing, \tag{6}$$

то существует S-допустимая пара цепей $(Y, Z) = (R_1, R_2)$, удовлетворяющая следующим условиям:

б1) $L(Y) = F(P_1)$, $F(Z) = L(P_1)$, $F(Y) \in V(H_1)$, $L(Z) \in V(H_1)$,

$$[F(P_1), u] \uparrow P_1 \subseteq Y, \ [L(P_1), v] \uparrow P_1 \subseteq Z,$$

$$|V_1^*| > |V(P_1)|, \quad V_1^* \subseteq V(H_1) \cup S,$$

где $V_1^* = V(Y) \cup V(Z)$, $uv \in X(P_1)$;

б2) если S-допустимая пара $(Y, Z) = (l_1, l_2)$ удовлетворяет условию б1), то

$$|(V(l_1) \cup V(l_2)) \cap S| \leqslant |V_1^* \cap S|;$$

б3) если S-допустимая пара $(Y, Z) = (l_1, l_2)$ удовлетворяет условиям б1), б2), то

$$|\{i / V(G_i) \cap (V(l_1) \cup V(l_2))\}| \leqslant |\{i / V(G_i) \cap V_1^* \neq \varnothing\}|;$$

б4) если S-допустимая пара $(Y, Z) = (l_1, l_2)$ удовлетворяет условиям б1)—б3), то

$$|V(l_1) \cup V(l_2)| \leqslant |V_1^*|.$$

Для R_1, R_2 существует цепь $P = P_2$, удовлетворяющая условиям леммы 2.

Если же условие (6) не имеет места, то будем предполагать, что $P_2 = P_1$, $V_1^* = V(P_1)$.

Пусть простая цепь $W = P_3$ удовлетворяет следующим условиям:

в1) $V(W) \subseteq V(H_2) \cup S$, $F(W) = F(P_2)$, $L(W) = L(P_2)$,

$$V(W) \cap V_1^* \subseteq \{F(P_2), L(P_2)\};$$

в2) если цепь $W = P$ удовлетворяет условию в1), то

$$|V(P) \cap S| \leqslant |V(P_3) \cap S|;$$

в3) если цепь $W=P$ удовлетворяет условиям в1), в2), то

$$|V(P)|\leqslant|V(P_3)|.$$

Если $V(G_t)\setminus V(P_3)\neq\varnothing$, то существует S-допустимая пара цепей $(Y, Z)=(R_3, R_4)$, удовлетворяющая следующим условиям:

г1) $L(Y)=F(P_3)$, $F(Z)=L(P_3)$, $F(Y)\in V(H_2)$, $L(Z)\in V(H_2)$,

$$[F(P_3), u]\uparrow P_3\subseteq Y,\ [L(P_3), v]\uparrow P_3\subseteq Z,\ V_2^*\subseteq V(H_2)\cup S,$$
$$V_2^*\cap V_1^*\subseteq\{F(P_2), L(P_2)\},\ |V_2^*|>|V(P_3)|,$$

где $V_2^*=V(Y)\cup V(Z)$, $uv\in X(P_3)$;

г2) если S-допустимая пара $(Y, Z)=(l_1, l_2)$ удовлетворяет условию г1), то

$$|(V(l_1)\cup V(l_2))\cap S|\leqslant|V_2^*\cap S|;$$

г3) если S-допустимая пара $(Y, Z)=(l_1, l_2)$ удовлетворяет условиям г1)—г2), то

$$|V(l_1)\cup V(l_2)|\leqslant|V_2^*|.$$

Для R_3, R_4 существует цепь $P=P_4$, удовлетворяющая условиям леммы 3.

Если же $V(G_t)\setminus V(P_3)=\varnothing$, то будем предполагать, что $P_4=P_3$, $V_2^*=V(P_3)$.

Исходя из построений цепей P_2 и P_4, можно показать, что простой цикл $P_2\cup P_4$ имеет не менее $3\delta-k$ вершин.

С л у ч а й 2. $|V(H_1)|\leqslant2\delta-2k+1$.

Рассуждения здесь можно провести аналогично случаю 1.

С л у ч а й 3. $|V(H_1)|=2\delta-k-2-\beta$, $\beta\in\{0, 1, \ldots, k-4\}$.

Пусть простая цепь $W=P_1$ удовлетворяет следующим условиям:

к1) $F(W)\in S$, $L(W)\in S$, $V(W)\subseteq V(H_2)\cup S$, $|V(W)\cap S|\leqslant\beta+3$;

к2) если цепь $W=P$ удовлетворяет условию к1), то

$$|V(P)\cap S|\leqslant|V(P_1)\cap S|;$$

к3) если цепь $W=P$ удовлетворяет условиям к1), к2), то

$$|V(P)|\leqslant|V(P_1)|.$$

Если $V(H_2)\setminus V(P_1)\neq\varnothing$, то существует S-допустимая пара $(Y, Z)=(R_1, R_2)$, удовлетворяющая следующим условиям:

л1) $L(Y)=F(P_1)$, $F(Z)=L(P_1)$, $F(Y)\in V(H_2)$, $L(Z)\in V(H_2)$,

$$[F(P_1), u]\uparrow P_1\subseteq Y,\ [L(P_1), v]\uparrow P_1\subseteq Z,$$
$$|V_1^*|>|V(P_1)|,\ V_1^*\subseteq V(H_2)\cup S,\ |V_1^*\cap S|\leqslant\beta+3,$$

где $V_1^*=V(Y)\cup V(Z)$, $uv\in X(P_1)$;

л2) если S-допустимая пара $(Y, Z)=(l_1, l_2)$ удовлетворяет условию л1), то

$$|(V(l_1)\cup V(l_2))\cap S|\leqslant|V_1^*\cap S|;$$

л3) если S-допустимая пара $(Y, Z)=(l_1, l_2)$ удовлетворяет условиям л1), л2), то

$$|V(l_1)\cup V(l_2)|\leqslant|V_1^*|.$$

Для R_1, R_2 существует цепь $P=P_2$, удовлетворяющая условиям леммы 3.

Если же $V(H_2)\setminus V(P_1)=\varnothing$, то будем предполагать, что $P_2=P_1$, $V_1^*=V(P_1)$.

Пусть простая цепь $W=P_3$ удовлетворяет следующим условиям:

м1) $F(W)=F(P_2)$, $L(W)=L(P_2)$, $V(W)\subseteq V(H_1)\cup S$,

$$V(W)\cap V_1^*=\{F(P_2),\ L(P_2)\};$$

м2) если цепь $W=P$ удовлетворяет условию м1), то

$$|V(P)\cap S|\leqslant|V(P_3)\cap S|;$$

м3) если цепь $W=P$ удовлетворяет условиям м1), м2), то

$$|\{i/V(P)\cap V(G_i)\neq\varnothing\}|\leqslant|\{i/V(P_3)\cap V(G_i)\neq\varnothing\}|;$$

м4) если цепь $W=P$ удовлетворяет условиям м1), м2), м3), то

$$|V(P)|\leqslant|V(P_3)|.$$

Цепь P_3 удовлетворяет условию $V(H_1)\setminus V(P_3)=\varnothing$.

Пусть тройка цепей $(W,\ Y,\ Z)=(P_4,\ R_5,\ R_6)$ удовлетворяет следующим условиям:

н1) $F(W)=F(P_3)$, $L(W)=L(P_3)$, $V(W)\subseteq V(H_2)\cup S$;

н2) пара Y, Z является S-допустимой и существует только тогда, когда $V(H_2)\setminus V(W)\neq\varnothing$,

н3) $L(Y)=F(P_3)$, $F(Z)=L(P_3)$, $F(Y)\in V(H_2)$, $L(Z)\in V(H_2)$,

$$[F(P_3),\ u]\uparrow W\subseteq Y,\ [L(P_3),\ v]\uparrow W\subseteq Z,\ |V_3^*|>|V(W)|,$$

где $V_3^*=V(Y)\cup V(Z)$, $uv\in X(W)$;

н4) если $V(H_2)\setminus V(W)=\varnothing$, то $V_3^*\equiv V(W)$;

н5) $V_3^*\subseteq V(H_2)\cup S$, $V_3^*\cap V(P_3)=\{F(P_3),\ L(P_3)\}$, $V_1^*\cap S\subseteq V_3^*\cap S$;

н6) если тройка $(W,\ Y,\ Z)=(P,\ l_1\ l_2)$ удовлетворяет условиям н1)—н5), то

$$|(V(l_1)\cup V(l_2))\cap S|\leqslant|V_3^*\cap S|;$$

н7) если тройка $(W,\ Y,\ Z)=(P,\ l_1,\ l_2)$ удовлетворяет условиям н1)—н6), то

$$|V(l_1)\cup V(l_2)|\leqslant|V_3^*|.$$

Для R_5, R_6 существует цепь $P=P_5$, удовлетворяющая условиям леммы 3.

Если $V(H_2)\setminus V(P_4)=\varnothing$, то будем предполагать, что $P_5=P_4$.

Простой цикл $P_3\cup P_5$ либо является гамильтоновым циклом для графа G, либо содержит по меньшей мере $3\delta-k$ вершин.

Доказательство теоремы 1 непосредственно следует из доказательства теоремы 2.

Следствие 1. Если 2-связный граф G удовлетворяет условию $\delta(G)\geqslant(v(G)+\alpha(G)-1)/3$, то $h(G)=v(G)$.

Следствие 2. Если 3-связный граф удовлетворяет условию $\delta(G)\leqslant(v(G)+\alpha(G)-1)/3$, то $h(G)\geqslant3\delta(G)-\alpha(G)+1$.

Рассмотрим графы $G_1=K_{\delta-k}$, $G_2=\overline{K}_{\delta+\alpha}$, $G_3=K_k$, $G_4=K_{\delta-k+1}$ попарно без общих вершин, где $\alpha\geqslant0$. Граф, полученный из графа

$(G_1+G_2)\bigcup(G_3+G_4)$ посредством добавления всевозможных ребер xy, где $x\in V(G_2)$, $y\in V(G_3)$, обозначим через G_0. Так как удаление δ—вершинного подграфа $G_1\bigcup G_3$ из графа G_0 порождает $\delta+\alpha+1$ компонент связности, то $h(G_0)=3\delta(G_0)-k(G_0)$. Пример графа G_0 показывает, что утверждения теорем 1 и 2 не улучшаемы.

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного
университета

Ժ. Գ. ՆԻԿՈՂՈՍՅԱՆ

Գրաֆի մաքսիմալ ցիկլի մասին

Դիցուք v-ն G գրաֆի գագաթների քանակն է, δ-ն՝ նվազագույն աստիճանը, h-ը՝ պարզ ցիկլերի մաքսիմալ երկարությունը, k-ն՝ գագաթային կապակցվածությունը և α-ն՝ գագաթային անկախության թիվը։

Ներկա աշխատանքում h-ի համար բերվում են հետևյալ գնահատականները.

Թեորեմ 1. Երբ 2-կապակցված G գրաֆում տեղի ունի $\delta\geqslant\frac{v+k}{3}$ պայմանը, ապա՝ $h=v$.

Թեորեմ 2. Երբ 3-կապակցված G գրաֆում տեղի ունի $\delta\leqslant\frac{v+k}{3}$ պայմանը, ապա՝ $h\geqslant 3\delta-k$:

Հետևանք 1. Երբ 2-կապակցված G գրաֆում տեղի ունի $\delta\geqslant\frac{v+\alpha-1}{3}$ պայմանը, ապա՝ $h=v$:

Հետևանք 2. Երբ 3-կապակցված G գրաֆում տեղի ունի $\delta\leqslant\frac{v+\alpha-1}{3}$ պայմանը, ապա՝ $h\geqslant 3\delta-\alpha+1$.

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Ф. Харари*, Теория графов, Мир, М., 1973. [2] *A. G. Dirac*, Math. Soc., Ser. 3, 2 (1952). [3] *C. St. J. A. Nash-Williams*, Studies in Pure Mathematics (L. Mirsky, ed.), Academic Press, London, 1971. [4] *V. Chvatal, P. Erdős*, Discrete math., 2 (1972).