ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXII 1981 2

УДК 517.535.4

МАТЕМАТИКА

Е. Д. Файнберг

Об оценке индикатора целой функции и интеграле по неаддитивной мере

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 12/VI 1980)

Пусть $A(\rho)$ — класс целых функций нецелого конечного порядка ρ и нормального типа, $h(\varphi, f)=\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\, r^{-\rho}\ln|f(re^{i\varphi})|$ — индикатор функции $f(z)\in A(\rho)$.

Пусть E — множество точек на окружности $S_1=\{z:|z|=1\}$, $K_{r,\theta}=\{z=te^{i\varphi}:t\in[0, r],\ e^{i\varphi}\in E\}$ — „сектор", опирающийся на E. Пусть, далее, $\overline{\Delta}(E, f)=\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\, r^{-\rho}n_f(K_{r,\theta})$ — верхняя угловая плотность распределения нулей n_f функции $f(z)$.

Пусть $\delta(E)$, $E\subset S_1$ — монотонная, неотрицательная функция множества E, а $\mathbf{X}_\theta$ — некоторый класс множеств на S_1. Обозначим через $A(\delta, \mathbf{X}_\theta)$ класс целых функций, определенный соотношением

$$A(\delta, \mathbf{X}_\theta)=\{f\in A(\rho):\overline{\Delta}(E, f)\leqslant\delta(E),\ E\in\mathbf{X}_\theta\}.$$

Мы ищем решение задачи о точной оценке индикатора в классе $A(\delta, \mathbf{X}_\theta)$. Подробное обсуждение этого круга задач и известные результаты см. в ([1–6]).

Для формулировки основных результатов нашей работы введем понятие интеграла по неаддитивной мере.

Пусть $\mathbf{X}$ — семейство борелевских множеств $X\subset\mathbf{C}$; $\delta(X)$ — неотрицательная монотонная функция множества, конечная на ограниченных множествах (неаддитивная мера); $N(\delta, \mathbf{X})$ — класс распределений масс μ, определенный соотношением $N(\delta, \mathbf{X})=\{\mu:\mu(X)\leqslant\delta(X),\ X\in\mathbf{X}\}$; $g(z)(\geqslant 0)$ — борелевская неотрицательная функция в $\mathbf{C}$.

Величину

$$\mathbf{X}-\int\limits_{\mathbf{C}} g\,d\delta\overset{\text{def}}{=}\sup\left\{\int\limits_{\mathbf{C}} g\,d\mu:\mu\in N(\delta, \mathbf{X})\right\} \tag{1}$$

назовем $\mathbf{X}$-интегралом по неаддитивной мере δ.

Этот интеграл обладает рядом естественных свойств: монотонностью, полуаддитивностью, положительной однородностью по g и по δ и другими. Если δ—распределение масс, а $\mathbf{X}$—„достаточно богатое“ семейство множеств, то интеграл (1) переходит в интеграл Лебега-Стилтьеса.

Отметим также связь нашего интеграла с интегралом А. А. Гольдберга по полуаддитивной мере ([5], с. 290). Для этого обозначим через $\mathfrak{M}$ кольцо, натянутое на семейство множеств $\mathbf{X}$, а через $\delta^*(X) \overset{\mathrm{def}}{=} \sup\{\mu(X) : \mu \in N(\delta, \mathbf{X})\}$, $X \in \mathfrak{M}$—полуаддитивное продолжение δ на $\mathfrak{M}$.

Теорема 1. *Если g—непрерывная функция, а $\mathbf{X}$—семейство открытых множеств, то верно равенство*

$$\mathbf{X}-\int\limits_{\mathbf{C}} g\,d\delta(z) = (\mathfrak{M}) \int\limits_{\mathbf{C}}^{\Gamma} g\,d\delta^*(z), \tag{2}$$

в котором справа стоит интеграл А. А. Гольдберга по полуаддитивной мере δ^*, заданной на кольце $\mathfrak{M}$, обобщенный на случай $\delta^*(\mathbf{C}) = \infty$.

Введем еще несколько обозначений. Пусть $\mathbf{X}_\theta$—семейство множеств на окружности, $\delta(E)$—неаддитивная мера, $\mathbf{X}_z = \{K_{r,\theta} : r \in (0, \infty); E \in \mathbf{X}_\theta\}$ (индексы θ, z показывают лишь, где расположены соответствующие семейства — на окружности или в плоскости). Пусть $\delta_z(X) \overset{\mathrm{def}}{=} r^\rho \delta(E)$, $X \in \mathbf{X}_z$—неаддитивная мера на „секторах“ из $\mathbf{X}_z$. Полагаем $H(u, p) \overset{\mathrm{def}}{=} \ln|E(u, p)|$, где $E(u, p) = (1-u)\exp\left(u + \frac{u^2}{2} + \ldots + \frac{u^p}{p}\right)$—канонический множитель Вейерштрасса.

Сформулируем основную теорему об оценке индикатора.

Теорема 2. *Если $\mathbf{X}_\theta$—семейство открытых множеств на S_1 и $\delta(E)$ удовлетворяет условию*

$$\delta(E) = \inf\{\delta(E_1) : E_1 \supset \overline{E},\ E_1 \in \mathbf{X}_\theta\}, \tag{3}$$

где $\overline{E}$—замыкание E, то

$$\sup\{h(\varphi, f) : f \in A(\delta, \mathbf{X}_\theta)\} = \mathbf{X}_z - \int\limits_{\mathbf{C}} H^+\left(\frac{e^{i\varphi}}{\zeta}, p\right) d\delta_z(\zeta).$$

Существует функция $f(z) \in A(\delta, \mathbf{X}_\theta)$, для которой достигается равенство при всех φ.

Доказательство этой теоремы базируется на результатах статьи ([9]).

Таким образом, в терминах $\mathbf{X}$-интеграла получена точная оценка индикатора в классе функций $A(\delta, \mathbf{X}_\theta)$.

В. С. Азарин в ([8]) получил точные оценки, но в классах целых функций, задаваемых другими (неклассическими) характеристиками асимптотического поведения нулей.

В ([5]) были ранее получены точные оценки для классов функций, задаваемых ограничениями на верхнюю угловую плотность нулей, в двух случаях: если $\delta(E)$—счетно-аддитивная мера и если $\delta(E)\equiv\Delta>0$ для любого $E\subset S_1$ (см. ([5]), с. 314, 328).

Легко проверить, что в этих случаях условие (3) выполняется, и из теоремы 2 получаются вышеуказанные оценки.

Кроме того, теорема 1 позволяет сформулировать точную оценку, полученную в теореме 2, в терминах интеграла А. А. Гольдберга, но не одномерного, как это было в ([5]), а двумерного по полуаддитивной мере δ^*.

В заключение сформулируем утверждение, которое показывает, что условие (3) «не слишком сильно» ограничивает выбор δ и $\mathbf{X}_0$, задающих класс функций $A(\delta, \mathbf{X}_0)$.

Пусть $\mathring{\mathbf{X}}$—семейство всех открытых множеств на S_1. Будем говорить, что **X плотно** в $\mathring{\mathbf{X}}$, если для любого $E_0\in\mathring{\mathbf{X}}$ и любого $\varepsilon>0$ найдется такое $E=E(\varepsilon, E_0)\in\mathbf{X}$, что $\overline{E_0\setminus E}\cup\overline{E\setminus E_0}\subset(\partial E_0)_\varepsilon$, где $(\partial E_0)_\varepsilon \overset{\mathrm{def}}{=}$ $\overset{\mathrm{def}}{=} \{e^{i\psi}: |e^{i\varphi}-e^{i\psi}|<\varepsilon,\ e^{i\varphi}\in\partial E_0\}$—$\varepsilon$-окрестность границы E_0.

Теорема 3. *Для любой неаддитивной меры* $\delta(E)$, $E\in\mathring{\mathbf{X}}$, *найдется семейство* $\mathbf{X}\subset\mathring{\mathbf{X}}$, *плотное в* $\mathring{\mathbf{X}}$ *(а значит, и в любом подмножестве* $\mathbf{X}$*) и такое, что соотношение* (3) *выполняется для всех* $E\in\mathbf{X}$.

Основные результаты работы переносятся на аналитические в полуплоскости функции нецелого конечного порядка.

Харьковский заочный
политехнический институт

Ս. Դ. ՖԱՅՆԲԵՐԳ

Ամբողջ ֆունկցիայի ինտեգրալի գնահատականի և ըստ ոչ ադիտիվ չափի ինտեգրալի մասին

Աշխատանքում մտցվում է ոչ ադիտիվ չափով ինտեգրալի գաղափար, դիտարկվում է նրա կապը Ա. Ա. Գոլդբերգի կիսաադիտիվ չափով ինտեգրալի հետ։

Ոչ ամբողջ կարգի ամբողջ ֆունկցիաների բավականաչափ լայն դասի համար, որը սահմանվում է զրոների անկյունային խտության վրա դրվող սահմանափակումներով, տրվում են ինդիկատորի ճշգրիտ գնահատականներ այդ ինտեգրալի տերմիններով։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Б. Я. Левин*, Распределение корней целых функций, Гостехиздат, М., 1956. [2] *М. І. Андрашко*, Доповіді АН УРСР, № 7 (1960). [3] *А. А. Гольдберг*, Сиб. мат. журн., т. 3 (1962). [4] *Н. В. Говоров*, Доповіді АН УРСР, № 2 (1966). [5] *А. А. Гольдберг*, Мат. сб., т. 58, 289 (1962); т. 61, 334 (1963); т. 65, 414 (1964); т. 65, 412 (1965)

[6] *А. А. Кондратюк,* Литовский мат. сб., т. 7, № 1 (1967); т. 8, № 1 (1968). [7] *А. А. Кондратюк,* В сб.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения, вып. 10, 11, Харьков (1970). [8] *В. С. Азарин,* В сб.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения, вып. 18, Харьков (1973). [9] *В. С. Азарин,* Мат. сб., т. 108 (150), № 2 (1979).