

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

А. Н. Айрапетян

Об одном обобщении теоремы Фату

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Н. У. Аракеляном 4/VI 1980)

1. В статье ⁽¹⁾ отмечалось, что голоморфная функция $f(z)$, определенная в круге $D: |z| < 1$ на комплексной z -плоскости и удовлетворяющая условию

$$\int_D |f'(z)| dx dy < +\infty, \quad z = x + iy, \quad (1)$$

обязана принадлежать классу Харди H^1 , и значит, в частности, она обладает конечными угловыми граничными значениями почти во всех точках границы $\Gamma: |z| = 1$. Замена условия (1) более слабым условием

$$\int_D |f'(z)| [1 + |f(z)|^2]^{-1} dx dy < +\infty \quad (2)$$

не сохраняет ни одного из названных выше свойств функции $f(z)$. Однако в этом случае можно утверждать, что на Γ существует такое множество M полной меры, $\text{mes } M = 2\pi$, в каждой точке которого почти каждая хорда круга D переходит при отображении $w = f(z)$ в спрямляемую кривую на сфере Римана Ω над w -плоскостью (см. ⁽²⁾). Более того, этим свойством обладает каждая мероморфная функция $f(z)$, определенная в D и удовлетворяющая условию (2).

Положим $\rho(f(z)) = |f'(z)| [1 + |f(z)|^2]^{-1}$ и для произвольной точки $\zeta \in \Gamma$ обозначим через $h(\zeta, \alpha)$ хорду круга D , оканчивающуюся в ζ и образующую с радиусом в этой точке угол раствора α ; $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Тогда, как отмечалось выше, в каждой точке $\zeta \in M$ мероморфная в D функция $f(z)$, удовлетворяющая условию (2), обладает тем свойством, что интегралы

$$\int_{h(\zeta, \alpha)} \rho(f(z)) |dz| < +\infty \quad (3)$$

конечны для почти всех значений $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Кроме того, можно утверждать, что кривые $f(h(\zeta, \alpha))$ для всех значений $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, для которых выполняется (3) оканчиваются в одной и той же точке на Ω .

Используя этот результат и общее утверждение из (3) (теорема 2), непосредственно получаем уточнение теоремы А. И. Плеснера для мероморфной (голоморфной) функции, удовлетворяющей условию (2). Именно, для такой функции $f(z)$ почти все точки границы Γ можно разбить на два непересекающихся множества — множество $F(f)$, в точках которого $f(z)$ имеет определенные угловые граничные значения, и множество $P(f)$, в точках которого каждая хорда содержит P -последовательность функции $f(z)$. Последнее означает, что каждая хорда $h(\zeta, \alpha)$, $\zeta \in P(f)$ содержит такую последовательность точек $\{z_n\}$, $n = 1, 2, \dots$; $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \zeta$, каждая бесконечная подпоследовательность которой обладает следующим свойством: в объединении неевклидовых кругов с неевклидовыми центрами в $\{z_{n_k}\}$ $k = 1, 2, \dots$, произвольного неевклидова радиуса $\varepsilon > 0$ функция $f(z)$ принимает бесконечно часто каждое значение на Ω , за возможными не более двумя исключениями.

В статье (4) получен более сильный результат. Рассмотрим произвольную положительную, невозрастающую и непрерывную функцию $\mu(t)$, определенную на полуоси $[0, +\infty]$. Если голоморфная в D функция $f(z)$ удовлетворяет условию

$$\iint_D \mu(|f(z)|) |f'(z)| dx dy < +\infty, \quad (4)$$

то $\Gamma = F(f) \cup P(f) \cup E$, $\text{mes } E = 0$ ((4), теорема 3).

2. Нами будет доказана

Теорема 1. Если голоморфная в D функция $f(z)$ удовлетворяет условию (4) и функция $\mu(t)$ обладает дополнительно свойством

$$\int_0^{\infty} \mu(t) dt = +\infty, \quad (5)$$

то $\Gamma = F(f) \cup E$, $\text{mes } E = 0$.

Заметим, что функция $\mu(t) = (1+t^2)^{-1}$, фигурирующая в условии (2) для голоморфной функции $f(z)$, не удовлетворяет условию (5).

3. Доказательство теоремы 1 разобьем на этапы, которые оформим в виде лемм. Первая из них доказана в (5), хотя в явном виде там не сформулирована (см. (5), стр. 121—122).

Лемма 1. Если голоморфная в D функция $f(z)$ имеет в точке $\zeta \in \Gamma$ конечные пределы по почти всем хордам круга D , оканчи-

вающимся в ζ , то точка ζ или принадлежит множеству $F(f)$, или в D существует жорданова кривая L_ζ , оканчивающаяся в ζ , по которой $f(z)$ стремится к значению ∞ , когда $z \rightarrow \zeta$, $z \in L_\zeta$. В последнем случае точка ζ является точкой неопределенности (по Багемилу) функции $f(z)$.

Лемма 2 ((²), теорема 3). Пусть неотрицательная действительная функция $U(z)$ непрерывна в D и удовлетворяет условию

$$\iint_D U(z) dx dy < +\infty. \quad (6)$$

Тогда на Γ существует множество M , $\text{mes } M = 2\pi$, в каждой точке ζ которого для почти всех хорд $h(\zeta, \alpha)$ выполняется свойство

$$\int_{h(\zeta, \alpha)} U(z) |dz| < +\infty. \quad (7)$$

Лемма 3. Пусть положительная, невозрастающая функция $\mu(t)$, определенная на $[0, +\infty]$, удовлетворяет условию (5), и пусть $f(z)$ — произвольная голоморфная в D функция. Тогда для любой хорды $h(\zeta, \alpha)$ в точке $\zeta \in \Gamma$, по которой

$$\int_{h(\zeta, \alpha)} \mu(|f(z)|) |f'(z)| |dz| < +\infty, \quad (8)$$

можно утверждать, что существует конечный $\lim_{z \rightarrow \zeta} f(z)$, когда $z \rightarrow \zeta$, $z \in h(\zeta, \alpha)$.

Доказательство. Известно, что в этих условиях существует определенный $\lim_{z \rightarrow \zeta} f(z)$, когда $z \rightarrow \zeta$, $z \in h(\zeta, \alpha)$ (см. (¹), лемма). Если этот предел бесконечен, то на хорде $h(\zeta, \alpha)$ можно выбрать две последовательности точек $\{z_n\}$ и $\{z'_n\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z'_n = \zeta$, таким образом, чтобы $|f(z_n)| = n$ и $|f(z'_n)| = n+1$, $n = 1, 2, \dots$, $n \leq |f(z)| \leq n+1$ для всех точек z , лежащих на отрезке Λ_n хорды $h(\zeta, \alpha)$ между точками z_n и z'_n , и чтобы отрезки Λ_n для различных номеров n , $n = 1, 2, \dots$, не пересекались между собой. Далее

$$\int_{h(\zeta, \alpha)} \mu(|f(z)|) |f'(z)| |dz| \geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{z_n}^{z'_n} \mu(|f(z)|) |f'(z)| |dz| \geq$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{z_n}^{z'_n} \mu(n) |f'(z)| |dz| \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) \left| \int_{z_n}^{z'_n} f'(z) dz \right| =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) |f(z'_n) - f(z_n)| \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n).$$

Условие (5) эквивалентно условию $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) = +\infty$. Получим противоречие с условием (8), и лемма 3 доказана.

4. Сформулированная выше теорема 1 есть немедленное следствие леммы 2, примененной к функции $U(z) = \mu(|f(z)|)|f'(z)|$, лемм 3 и 1 и теоремы Багембла (см. (6), стр. 74, теорема 8), согласно которой множество неопределенности произвольной функции, определенной в D , не более чем счетно.

5. Рассмотрим на $(0, 1]$ произвольную положительную, невозрастающую и непрерывную функцию $H(t)$, для которой $\lim_{t \rightarrow 0} H(t) = \infty$,

$$\lim_{t \rightarrow 0} tH(t) = 0 \text{ и } \int_0^1 \frac{dt}{tH(t)} < +\infty. \text{ Положим } \lambda_n^H = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{kH\left(\frac{1}{k}\right)}. \text{ Для}$$

произвольного борелевского множества E на Γ символом $\text{сар}_H E$ обозначим его выпуклую емкость относительно последовательности λ_n^H (см. (7), стр. 364).

Теорема 2. Пусть голоморфная в круге D функция $f(z)$ удовлетворяет условию

$$\iint_D (1-|z|)H(1-|z|)[\mu(|f(z)|)|f'(z)|]^2 dx dy < +\infty, \quad (9)$$

в котором функция $H(t)$ обладает всеми названными выше свойствами, а функция $\mu(t)$ такая же, как и в теореме 1. Тогда

$$\Gamma = F(f) \cup E, \quad \text{сар}_H E = 0.$$

Доказательство этой теоремы проходит по той же схеме, что и доказательство теоремы 1, только вместо леммы 2 используется

Лемма 4 (см. (5), стр. 116, основная лемма). Пусть неотрицательная действительная функция $U(z)$ непрерывна в D и удовлетворяет условию

$$\iint_D (1-|z|)H(1-|z|)[U(z)]^2 dx dy < +\infty.$$

Тогда на Γ существует множество M , $\text{сар}_H(\Gamma \setminus M) = 0$, в каждой точке ζ которого для почти всех хорд $h(\zeta, \alpha)$, $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ выполняется свойство (7).

6. Мы заканчиваем эту статью замечанием, что любая голоморфная функция $f(z)$, удовлетворяющая условию (9), удовлетворяет также условию (4). Пользуясь случаем, выражаю искреннюю благодарность В. И. Гаврилову за постановку задачи и ценные замечания.

Ереванский институт
народного хозяйства

Ֆատուի բեռեմի մի ընդհանրացման մասին

Դիցուք $f(z)$ -ը միավոր շրջանում որոշված հոլոմորֆ ֆունկցիա է, իսկ $\mu(x)$ -ը դրական կիսաոսանցքի վրա որոշված դրական, անընդհատ և չաճող ֆունկցիա է, որի համար

$$\int_0^{\infty} \mu(x) dx = +\infty$$

Հոգավոր հիմնական արդյունքը հետևյալն է. եթե

$$\iint_{|z|<1} \mu(|f(z)|) |f'(z)| dx dy < +\infty$$

ապա՝ միավոր շրջանագծի վրա, բացառությամբ զրո չափի բազմության, $f(z)$ ֆունկցիան ունի անկյունային եզրային արժեքներ:

Այնուհետև բերվում է համանման թեորեմ ուռուցիկ H -ունակության տերմիններով, որտեղ $H(t)$ ֆունկցիան բավարարում է որոշակի պայմանների:

ЛИТЕРАТУРА—ԴՐԱՎԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ В. И. Гаврилов, Мат. заметки, т. 15. № 6 (1974). ² В. И. Гаврилов, Сибирский мат. журн., т. 14, № 5 (1973). ³ В. И. Гаврилов, ДАН СССР, т. 216, № 1 (1974). ⁴ А. Н. Канатников, Вестник Моск у-та, сер. матем., мех., № 4 (1976). ⁵ В. И. Гаврилов, В. С. Захарян, Изв. АН АрмССР, сер. матем., т. 11, № 2 (1976). ⁶ К. Носиро, Предельные множества, ИЛ, М., 1963. ⁷ И. К. Бари. Тригонометрические ряды, Мир, М., 1961.